ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO 1999
Indirizzo Scientifico-Tecnologico Progetto Brocca

Trascrizione del testo e redazione delle soluzioni di Paolo Cavallo.

La prova

Il candidato svolga una breve relazione su uno solo dei seguenti temi, a sua scelta.

Tema 1

Si vuole determinare il rapporto e/m, tra carica e massa di un elettrone, utilizzando un tubo contenente neon a bassa pressione al cui interno gli elettroni sono emessi per effetto termoelettronico (conosciuto anche come effetto termoionico).

Essi hanno una velocità iniziale trascurabile e sono accelerati tre due elettrodi da una differenza di potenziale $\Delta V = 0{,}78\,\mathrm{kV}$ fino a raggiungere la velocità v. Gli atomi di neon ne rendono visibile la traiettoria interagendo al loro passaggio.

Una volta raggiunta la velocità v, gli elettroni entrano in una zona che è sede di un campo magnetico con $B = 4{,}3 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{T}$ e con un angolo α tra i vettori $\vec{B}$ e $\vec{v}$.

Il candidato:

1. descriva e spieghi l'effetto termoelettronico;
2. spieghi perché gli atomi di neon nel tubo rendono visibile la traiettoria degli elettroni;
3. disegni e commenti la possibile traiettoria di un elettrone tra due elettrodi (prima che risenta del campo magnetico) e poi all'interno del campo magnetico per $\alpha = 90°$ e per $\alpha < 90°$;
4. ricavi e commenti la formula che permette di calcolare la velocità dell'elettrone in funzione della d.d.p. tra gli elettrodi in un tubo sotto vuoto; calcoli tale velocità ricordando che la carica e la massa dell'elettrone sono $1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ e $9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$;
5. ricavi e commenti la formula che permette di calcolare il raggio della traiettoria in funzione della velocità dell'elettrone e dell'induzione magnetica; calcoli il raggio di tale traiettoria sapendo che l'angolo tra i vettori $\vec{B}$ e $\vec{v}$ è $\alpha = 60°$;

6. ricavi e commenti la formula che permette di calcolare il rapporto e/m in funzione dei valori misurabili ΔV, B e r.

Tema 2

Un condensatore è un sistema elettrico costruito in modo tale da avere una grande capacità. Più condensatori possono essere collegati fra loro per aumentare o diminuire la capacità complessiva disponibile.

Il candidato:

1. definisca la grandezza fisica "capacità elettrica" di un conduttore, la sua unità di misura nel sistema S.I. e i suoi sottomultipli;
2. calcoli il raggio di un'ipotetica sfera conduttrice che abbia la capacità di un farad e commenti il risultato; come dato di riferimento prenda il raggio medio della Terra di 6370 km;
3. descriva la struttura di un condensatore piano spiegando perché essa permette d'aumentare, per quanto possibile, la capacità elettrica del sistema;
4. ricavi e commenti la formula per calcolare la capacità elettrica di un condensatore piano;
5. descriva almeno un'utilizzazione del condensatore in ambito scientifico o tecnologico;
6. disegni i simboli grafici di tre condensatori da $100\,\mu$F collegati in modo da ottenere le capacità complessive di $150\,\mu$F e di $300\,\mu$F.

Il candidato risolva, infine, il seguente problema.

Un sistema di condensatori avente la capacità complessiva di 1 mF, a cui è applicata la d.d.p. di 10 kV, è fatto scaricare su un resistore con $R = 100\,\Omega$ immerso in un litro d'acqua distillata alla temperatura di $20\,^\circ$C e contenuta in un recipiente isolato termicamente.

Il candidato calcoli la temperatura finale dell'acqua dopo che il sistema di condensatori si è completamente scaricato e spieghi che cosa succederebbe se si fosse raddoppiato il valore della resistenza.

La soluzione

Tema 1

1.

L'espressione *effetto termoelettronico* indica il fenomeno consistente nell'emissione di elettroni da parte di un catodo portato a una temperatura sensibilmente superiore alla temperatura ambiente. Consideriamo un tubo a vuoto con due elettrodi connessi ai poli di una batteria in serie con un amperometro. In condizioni normali, l'amperometro non indica il passaggio di alcuna corrente, o al più di una debole corrente di scarica dovuta al gas residuo nel tubo. Se però il catodo viene riscaldato, ad esempio facendovi passare la corrente di un circuito secondario, si osserva il passaggio di una corrente tanto più intensa quanto più è elevata la temperatura del catodo.

L'effetto termoelettronico è facilmente spiegabile in termini classici ricordando che, aumentando la temperatura, aumenta l'energia cinetica media delle particelle che costituiscono il metallo e in particolare degli elettroni. Aumenta di conseguenza la percentuale di elettroni veloci, con un'energia almeno sufficiente a vincere l'attrazione elettrostatica da parte del reticolo cristallino e ad uscire dal catodo. Una volta all'esterno del metallo, la differenza di potenziale applicata dalla batteria accelera gli elettroni verso l'anodo, in modo che essi vanno a costituire una corrente misurabile.

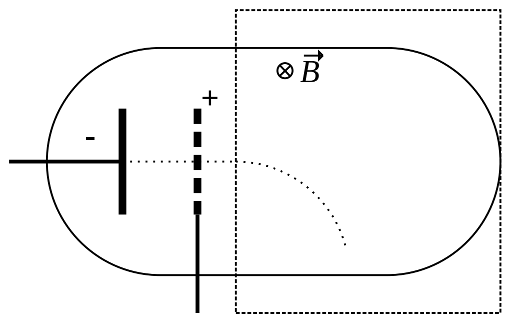
2.

Se nel tubo discusso in precedenza è presente del neon a bassa pressione, gli elettroni accelerati verso l'anodo urteranno gli atomi di neon al loro passaggio. Nell'urto fra un elettrone e un atomo di neon, l'energia dell'elettrone libero sarà ceduta in parte a uno degli elettroni più esterni dell'atomo di neon, il quale si porterà allora su un livello energetico più alto. Dopo un brevissimo intervallo di tempo, l'elettrone tornerà al livello energetico più basso, emettendo un fotone di energia hf pari alla differenza di energia fra i due livelli.

In altri termini, gli atomi di neon emetteranno luce al passaggio degli elettroni, permettendo così di individuarne la traiettoria (nei limiti in cui il concetto di traiettoria è applicabile a un elettrone).

3.

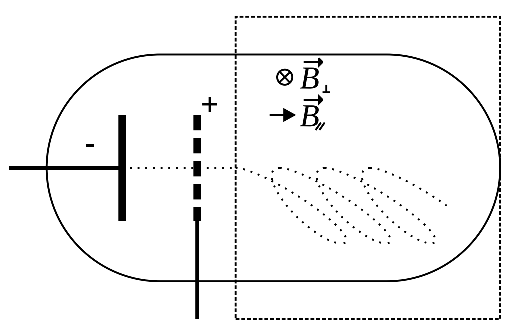
La traiettoria di un elettrone nel primo caso ($\alpha = 90°$) è immediata. L'elettrone ha una traiettoria rettilinea fra i due elettrodi (a rigore, l'elettrone cade anche nel campo gravitazionale terrestre; ma il moto è così rapido che la traiettoria non fa in tempo a mostrare deviazioni dal percorso rettilineo). Quando l'elettrone entra nel rettangolo tratteggiato che è sede del campo $\vec{B}$ (perpendicolare al piano del foglio), la forza di Lorentz fa sì che assuma una traiettoria circolare. Nel disegno che segue abbiamo tracciato la traiettoria dell'elettrone (o parte di essa) con una linea punteggiata.



Nel secondo caso ($\alpha < 90°$) la situazione è più complessa, e la analizzeremo esclusivamente nel caso non relativistico $v \ll c$.

Ipotizziamo che il campo $\vec{B}$ abbia due componenti, una $\vec{B}_\perp$ perpendicolare al piano del foglio, l'altra $\vec{B}_{/\!/}$ parallela alla direzione iniziale dell'elettrone. Scomponiamo il moto dell'elettrone in due moti indipendenti e sovrapposti, il primo con velocità $\vec{v}_\perp$ perpendicolare a $\vec{B}$ e il secondo con velocità $\vec{v}_{/\!/}$ parallela ad esso. Mentre il secondo moto si manterrà invariato sotto l'azione del campo magnetico, il primo si trasformerà in un moto circolare uniforme. La sovrapposizione dei due moti darà luogo pertanto a una traiettoria elicoidale con asse parallelo a $\vec{v}_{/\!/}$ e quindi a $\vec{B}$.

Il disegno non è semplice da realizzare. L'elica, nelle nostre ipotesi, ci appare di scorcio, poiché $\vec{B}$ è inclinato rispetto al piano del disegno.



Non possiamo fare a meno di chiederci se è davvero questa la situazione che l'estensore della prova aveva in mente di sottoporre ai candidati. La ragione di dubitare ci è data dal punto 5. del tema, dove si parla di "raggio della traiettoria". Che cosa si deve intendere per "raggio" di una traiettoria elicoidale? Il raggio del cilindro intorno al quale l'elica risulta avvolta? La risposta non è affatto ovvia. Per di più, il raggio inteso in questa accezione è proprio ciò che occorre misurare per determinare il rapporto e/m, come nel punto 6. si richiede esplicitamente. Ora, se si vuole misurare tale raggio, è certamente preferibile avere a che fare con una traiettoria piana piuttosto che con una traiettoria elicoidale: non si vede perché lo sperimentatore dovrebbe porsi in una situazione così scomoda, quando l'introduzione di un campo $\vec{B}$ perpendicolare alla velocità iniziale degli elettroni consente misure molto più agevoli.

4.

La presenza di una differenza di potenziale ΔV accelera gli elettroni che emergono dal catodo. L'energia potenziale elettrostatica del sistema diminuisce, mentre aumenta l'energia cinetica degli elettroni:

$$-\Delta E_p = \Delta K$$

che per un singolo elettrone si scrive:

$$e\Delta V = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 \tag{1}$$

dove si è trascurata la velocità iniziale v_0 degli elettroni.

La velocità finale v degli elettroni risulta

$$v = \sqrt{\frac{2\,e\Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 0{,}78 \cdot 10^3\,\mathrm{V}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}}} = 1{,}6 \cdot 10^7\ \mathrm{m/s}. \tag{2}$$

Poiché $v \ll c$, la nostra trattazione non relativistica è giustificata.

5.

Rimandiamo il lettore ai nostri commenti alla fine della trattazione del punto 3., a proposito dell'espressione "raggio della traiettoria".

Supponendo che per raggio si intenda quello del cilindro intorno al quale è avvolta l'elica, ricordiamo che esso non è altro che il raggio del moto circolare uniforme relativo alla componente $\vec{v}_\perp$ della velocità. Per questo moto, la forza di Lorentz svolge il ruolo di forza centripeta. Possiamo scrivere:

$$e\,v_\perp\,B = m\frac{v_\perp^2}{r}. \tag{3}$$

Ricavando r e osservando che $v_\perp = v\,\sin(\alpha)$ otteniamo:

$$r = \frac{m\,v\,\sin(\alpha)}{e\,B} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \cdot 1{,}6 \cdot 10^7\,\mathrm{m/s} \cdot \sin(60°)}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 4{,}3 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{T}} = 0{,}18\,\mathrm{m}. \tag{4}$$

6.

Facciamo notare che se si vuole un'espressione che dipenda dalle grandezze sperimentalmente misurabili, nell'elenco di queste occorre comprendere l'angolo α. Di nuovo, il legame fra il tema e la cornice sperimentale proposta non ci sembra del tutto risolto.

Sostituendo nella (4) l'espressione della velocità data dalla (2) e elevando al quadrato otteniamo

$$r^2 = \frac{2\,m\,\Delta V\,[\sin(\alpha)]^2}{e\,B^2}$$

e risolvendo per il rapporto e/m richiesto abbiamo infine:

$$\frac{e}{m} = \frac{2\,\Delta V\,[\sin(\alpha)]^2}{r^2\,B^2} \tag{5}$$

Tema 2

1.

La *capacità elettrica* C di un conduttore carico isolato è definita come il rapporto fra la carica totale Q_T presente sul conduttore e il potenziale elettrico V al quale si trova il conduttore:

$$C = \frac{Q_T}{V}. \tag{6}$$

Di conseguenza le dimensioni fisiche della capacità sono quelle di una carica divisa per una tensione, ovvero di una carica al quadrato divisa per un'energia. L'unità di misura nel Sistema Internazionale è il *farad*, definito in modo che

$$1\,\mathrm{F} = \frac{1\,\mathrm{C}}{1\,\mathrm{V}} = \frac{1\,\mathrm{A}\cdot 1\,\mathrm{s}}{1\,\mathrm{J}/(1\,\mathrm{A}\cdot 1\,\mathrm{s})} = \frac{(1\,\mathrm{A})^2\cdot(1\,\mathrm{s})^2}{1\,\mathrm{kg}\cdot(1\,\mathrm{m})^2/(1\,\mathrm{s})^2} = \frac{(1\,\mathrm{A})^2\cdot(1\,\mathrm{s})^4}{1\,\mathrm{kg}\cdot(1\,\mathrm{m})^2}. \tag{7}$$

Com'è noto, e come si vedrà esplicitamente in seguito, il farad è un campione di capacità di dimensioni troppo elevate per essere di uso pratico. Per questo risultano importanti i suoi sottomultipli, definiti come previsto dal Sistema Internazionale:

$$\begin{aligned}
1\,\text{millifarad} &= 1\,\mathrm{mF} = 10^{-3}\,\mathrm{F}\\
1\,\text{microfarad} &= 1\,\mu\mathrm{F} = 10^{-6}\,\mathrm{F}\\
1\,\text{nanofarad} &= 1\,\mathrm{nF} = 10^{-9}\,\mathrm{F}\\
1\,\text{picofarad} &= 1\,\mathrm{pF} = 10^{-9}\,\mathrm{F}.
\end{aligned}$$

Il concetto di capacità *elettrica* di un sistema è stato costruito storicamente in analogia con il concetto di capacità di un *recipiente* e di capacità *termica*. In tutti questi casi, infatti, entra in gioco la relazione fra "qualcosa" che viene fornito al sistema e il *livello* a cui si porta il sistema in conseguenza di ciò. Nel caso di un recipiente, parliamo di un fluido e del livello da esso raggiunto nel recipiente. Nel caso della capacità termica, parliamo dell'energia termica fornita al sistema e del livello termico, cioè della *temperatura*, da esso raggiunta. Nel caso della capacità elettrica, si tratta della carica elettrica e del livello elettrico, cioè del *potenziale*.

Poiché i primi modelli fisici tanto dell'energia termica che della quantità di carica sono stati quelli di un particolare *fluido*, è facile osservare che l'analogia sottesa al termine di "capacità" non è affatto casuale dal punto di vista storico.

2.

La capacità elettrica di una sfera conduttrice carica isolata e in equilibrio, di raggio R, può essere determinata calcolando il potenziale V a cui essa si trova.

La sfera è un conduttore all'equilibrio; di conseguenza, il campo elettrico al suo interno dev'essere nullo ovunque, altrimenti i portatori di carica si metterebbero in moto, contro l'ipotesi dell'equilibrio. Sulla superficie della sfera, per lo stesso motivo, il campo elettrico dev'essere normale alla superficie. Così, se immaginassimo di spostare una carica infinitesima da un punto all'altro della sfera, il campo elettrico non eseguirebbe su di essa alcun lavoro. Poiché la differenza di potenziale fra due punti è data appunto dal lavoro elettrico compiuto spostando da uno all'altro una carica di prova, concludiamo che il potenziale deve essere lo stesso in tutti i punti della sfera.

Per il teorema di Gauss, il flusso del campo elettrico su una qualsiasi superficie chiusa interna alla sfera deve risultare proporzionale alla carica elettrica racchiusa dalla superficie. Ma, per quanto detto sopra, tale flusso risulta identicamente nullo per qualunque superficie. Di conseguenza, all'interno della sfera non troveremo alcuna carica elettrica non equilibrata. In altri termini, la carica elettrica depositata sulla sfera deve distribuirsi sulla superficie di questa.

Determiniamo il potenziale elettrico al centro della sfera. Ogni carica infinitesima dq posta sulla superficie della sfera può essere trattata come una carica puntiforme, che genera a distanza R, cioè nel centro della sfera, un potenziale infinitesimo

$$dV(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{R}.$$

Sommando tutti questi contributi, e ricordando che R ha lo stesso valore per ciascuno di essi, otteniamo il potenziale

$$V(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_T}{R} \tag{8}$$

che coincide, in maniera niente affatto casuale, con il potenziale che la carica Q_T genererebbe sulla superficie della sfera se fosse concentrata nel suo centro.

Come abbiamo già detto, questo valore del potenziale è lo stesso in tutti i punti della sfera e può quindi essere considerato come *il* potenziale della sfera. Per la definizione (6) otteniamo la seguente espressione della capacità di una sfera:

$$C = \frac{Q_T}{V} = Q_T \cdot 4\pi\epsilon_0 \frac{R}{Q_T} = 4\pi\epsilon_0\, R. \tag{9}$$

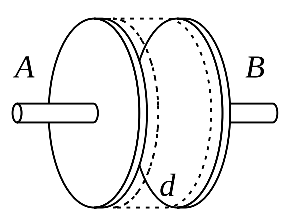
Se $C = 1\,\mathrm{F}$ abbiamo:

$$R = \frac{C}{4\pi\epsilon_0} = \frac{1\,\mathrm{F}}{4\pi\, 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m}} = 8{,}988 \cdot 10^{9}\,\mathrm{m}.$$

Come si vede, si tratta di una sfera il cui raggio è di tre ordini di grandezza maggiore di quello della Terra.

3.

Un condensatore piano è costituito da due superfici conduttrici piane (dette *armature*) di area S e affacciate a una distanza x. Lo spazio fra le armature A e B è per lo più riempito da un dielettrico d.

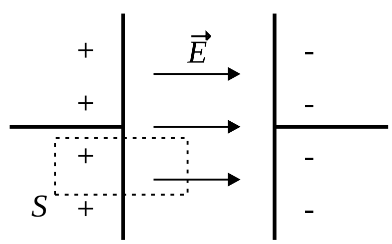


Se depositiamo una carica positiva $+Q$ sull'armatura A, l'altra armatura, se collegata a terra, si carica per induzione assumendo una carica negativa $-Q$. I due conduttori non sono evidentemente isolati, per cui il potenziale a cui si trova ciascuno di essi dipende dalla presenza dell'altro conduttore. Piuttosto che parlare di potenziale di ciascuna delle armature, è conveniente parlare della *differenza di potenziale* ΔV fra di esse. La capacità di un condensatore è infatti definita come il rapporto fra la carica presente su un'armatura e la *differenza* di potenziale fra le armature.

Il testo chiede di spiegare perché un condensatore piano "permette d'aumentare, per quanto possibile, la capacità elettrica del sistema". Non è del tutto chiaro che cosa l'estensore abbia in mente. Ma, in ogni caso, ci sembra più opportuno discutere questo punto contestualmente al prossimo e a partire dall'espressione analitica della capacità di un condensatore piano.

4.

Per determinare il campo elettrico generato da *una* armatura, applichiamo il teorema di Gauss alla superficie cilindrica S (rappresentata di taglio nel disegno qui sotto).



Nel seguito, supporremo che la distanza fra le armatura sia molto minore delle dimensioni delle armature stesse. Ciò comporta che, per i punti lontani dal bordo, gli effetti di bordo siano molto limitati, e il campo appaia come quello di una distribuzione piana di carica praticamente infinita. Per motivi di simmetria, il campo deve avere due proprietà importanti:

1. deve essere perpendicolare alla superficie dell'armatura;
2. deve avere la stessa intensità su entrambe le facce dell'armatura, a distanze uguali da essa, e deve essere rivolto in versi opposti.

Il flusso di tale campo attraverso il cilindro S è fatto di due contributi: il flusso attraverso la superficie laterale e quello attraverso le due superfici di base. Per il punto 1. indicato sopra, il primo contributo è nullo, perché il campo è dappertutto tangente alla superficie laterale del cilindro. Per il punto 2., il flusso totale è pari al doppio del flusso attraverso una delle due basi del cilindro. Tale flusso vale:

$$\Phi_S(\vec{E}) = 2\,\Phi_{base}(\vec{E}) = 2\,\vec{E} \circ \vec{A} = 2\,E \cdot A \tag{10}$$

dove A è l'area di base di S, ed è anche l'area intercettata da S sull'armatura. Per il teorema di Gauss, il flusso totale attraverso S dev'essere uguale alla carica totale racchiusa da S divisa per la costante dielettrica del mezzo:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_T}{\epsilon} = \frac{\sigma\, A}{\epsilon} \tag{11}$$

dove σ è la densità superficiale di carica sull'armatura.

Confrontando la (10) e la (11) otteniamo l'espressione del campo elettrico di un'armatura:

$$E = \frac{\sigma}{2\,\epsilon}. \tag{12}$$

Si tratta di un campo *indipendente dalla distanza dalle armature*. Nei limiti delle ipotesi da noi poste, e dunque per distanze dall'armatura piccole rispetto all'armatura stessa, e per punti non troppo vicini al bordo, il campo generato da un'armatura ha lo stesso valore in tutti i punti.

Sovrapponiamo ora i campi generati dalle due armature. All'esterno del condensatore i campi hanno verso opposto (ricordiamo che il campo dell'armatura positiva è *uscente* da essa, mentre il campo dell'armatura negativa è *entrante* in essa) ma uguale direzione e intensità: la loro somma è pertanto uguale a zero. All'interno del condensatore, invece, i versi dei due campi sono concordi, per cui i campi si sommano. Il campo totale è perciò confinato all'interno del condensatore e ha ivi intensità σ/ϵ uniforme.

Per determinare la differenza di potenziale fra le armature, ricordiamo la definizione:

$$\Delta V_{AB} = -\int_A^B \vec{E} \circ d\vec{s} \tag{13}$$

che in questo caso, andando dall'armatura negativa a quella positiva (ricordiamo che x rappresenta la distanza fra le armature), diventa:

$$\Delta V = -(\vec{E} \circ \Delta\vec{s}) = -(-E\,x) = E\,x = \frac{\sigma\,x}{\epsilon} = \frac{Q\,x}{\epsilon\,S}. \tag{14}$$

La capacità del condensatore risulta pertanto:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\epsilon\,S}{x}. \tag{15}$$

L'espressione (15) ci permette di capire quali fattori influenzano la capacità di un condensatore. In primo luogo, la presenza di un dielettrico fra le armature aumenta il valore della capacità di un fattore pari alla costante dielettrica relativa ϵ_r del mezzo interposto. In effetti, il dielettrico fra le armature cariche risulta polarizzato, con un campo elettrico dovuto alla polarizzazione rivolto in verso *opposto* a quello delle armature. Ciò va a diminuire il campo elettrico totale e quindi la differenza di potenziale fra le armature, permettendo di immagazzinare su di esse più carica elettrica a parità di tensione.

In secondo luogo, la capacità risulta tanto maggiore quanto maggiore è il rapporto S/x. Per avere una grande capacità, le armature devono essere le più estese possibile e la distanza che le separa dev'essere la minima possibile. Ciò viene realizzato, in pratica, con fogli conduttori molto sottili, separati da strati di dielettrico spessi poche molecole, e avvolti strettamente su se stessi.

5.

Molte applicazioni dei condensatori sono direttamente legate alla loro natura di *serbatoi di carica elettrica.* In alcune calcolatrici programmabili, ad esempio, un condensatore svolge il ruolo di "generatore di tensione di emergenza". Queste calcolatrici non hanno, ovviamente, memorie di massa simili a un disco fisso, così che i dati e i programmi dell'utente devono essere conservati nella RAM sotto forma di stati di tensione. La tensione necessaria a questo scopo è fornita naturalmente dalle batterie che fanno funzionare la calcolatrice. Quando queste batterie sono esaurite e devono essere sostituite, però, occorre un "dispositivo tampone" che mantenga una tensione sufficiente per il tempo necessario. Questo dispositivo può appunto essere costituito da un condensatore di grande capacità, in grado di mantenere una corretta differenza di potenziale per parecchi minuti a calcolatrice spenta.

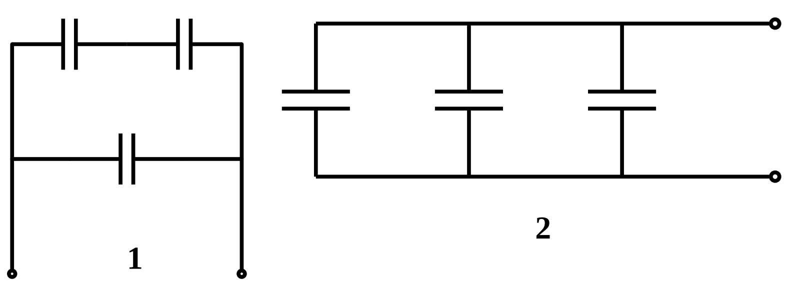
6.

È facile dimostrare che la connessione di più condensatori gode delle seguenti proprietà:

1. la connessione di più condensatori in parallelo è equivalente a un unico condensatore, la cui capacità sia uguale alla somma delle capacità dei condensatori;

2. la connessione di più condensatori in serie è equivalente a un unico condensatore, l'inverso della cui capacità sia uguale alla somma degli inversi delle capacità dei condensatori.

In base a ciò, tracciamo gli schemi seguenti, dove tutti i condensatori hanno una capacità di $100\,\mu$F.



Questi schemi costituiscono la risposta al quesito proposto.

1. Nello schema **1** i due condensatori collegati *in serie* hanno una capacità equivalente di $50\,\mu$F, così che la loro connessione *in parallelo* con il terzo condensatore ha una capacità equivalente di $150\,\mu$F.

2. Nello schema **2** i tre condensatori collegati *in parallelo* hanno una capacità equivalente di $300\,\mu$F.

Problema

Per risolvere il problema proposto, determiniamo l'espressione che fornisce l'energia necessaria a caricare un condensatore fino a una tensione ΔV assegnata. Se sul condensatore è presente una carica q e quindi una differenza di potenziale $\Delta V(q)$, per portare sull'armatura positiva un'ulteriore carica infinitesima dq occorre spendere un'energia $dq\,\Delta V$. L'energia totale necessaria a caricare il condensatore è pertanto:

$$E = \int_0^Q \Delta V\, dq = \int_0^Q \frac{q}{C}\, dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\, C\,\Delta V^2. \tag{16}$$

Nel nostro caso tale energia vale

$$E = \frac{1}{2} \cdot 1\,\mathrm{mF} \cdot (10\,\mathrm{kV})^2 = 50\,\mathrm{kJ}. \tag{17}$$

Quando il condensatore si scarica sul resistore, l'energia immagazzinata viene spesa per fare passare la corrente in quest'ultimo e viene quindi convertita in energia termica del resistore e dell'acqua per effetto Joule. Trascurando (come è certamente legittimo) la capacità termica del resistore, l'energia termica trasferita all'acqua può essere calcolata con l'espressione:

$$E_{term} = C_{term}\,\Delta T = c\,m\,\Delta T. \tag{18}$$

Per il principio di conservazione dell'energia la (17) e la (18) sono uguali. Ricordando che per l'acqua $c = 4186\,\mathrm{J/(K\,kg)}$ e $d = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$ e risolvendo per ΔT otteniamo:

$$\Delta T = \frac{E_{term}}{c\,m} = \frac{50\,\mathrm{kJ}}{4186\,\mathrm{J/(K\cdot kg)}\cdot 1\,\mathrm{kg}} = 12\,\mathrm{K} = 12\,^\circ\mathrm{C}. \tag{19}$$

La temperatura finale dell'acqua risulta di $32\,^\circ$C. Facciamo notare che questo risultato non dipende affatto dal valore della resistenza. Se R raddoppiasse, la costante di tempo $\tau = RC$ del circuito di scarica raddoppierebbe anch'essa e la scarica si svolgerebbe più lentamente, ma la temperatura finale dell'acqua avrebbe lo stesso valore.