

UNIVERSITÀ DI PADOVA



FACOLTÀ DI INGEGNERIA

DIPARTIMENTO DI ELETTRONICA E INFORMATICA

TESI DI LAUREA

IDENTIFICAZIONE DI ASSI MECCANICI MOVIMENTATI DA MOTORI LINEARI

Relatore: Ch.mo Prof. Ing. Giorgio Picci

Correlatore: Ing. Marco Gasparini

Laureando: Marco Riccato 394526/IL

ANNO ACCADEMICO 2000–2001

Ai miei nonni

Indice

Sommario	vii
1 Introduzione	1
2 Assi meccanici movimentati da motori lineari	3
2.1 Il banco prova	3
2.2 Il motore lineare	3
2.3 Funzione di trasferimento	4
2.4 Comportamenti non lineari	6
2.5 Il sistema di controllo <i>MicroMach</i>	8
2.6 Modello dinamico del sistema di controllo	9
3 Stima Parametrica di Modelli Lineari	11
3.1 Introduzione	11
3.2 Identificazione ad Errore di Predizione	13
3.2.1 Modelli e predizione	14
3.2.2 Il PEM	15
3.2.3 Convergenza e consistenza	16
3.2.4 <i>Bias</i>	16
3.2.5 Calcolo delle stime	17
3.2.6 Varianza asintotica	18
3.3 Modelli di Sistemi Lineari Tempo-Invarianti	19
3.3.1 Strutture ARX	19

3.3.2	Strutture ARMAX	21
3.3.3	Altre strutture	22
4	Identificazione di Sistemi a Retroazione	25
4.1	Introduzione	25
4.2	Identificabilità ad anello chiuso	26
4.2.1	Convergenza e consistenza	26
4.2.2	<i>Bias</i>	27
4.2.3	Varianza asintotica	28
4.3	Approcci all'identificazione di sistemi a retroazione	28
4.3.1	Identificazione diretta	29
4.3.2	Identificazione indiretta	29
4.3.3	Identificazione congiunta ingresso/uscita	30
5	Identificazione di assi movimentati da motori lineari	33
5.1	Introduzione	33
5.2	Progetto dell'esperimento	34
5.2.1	Tempo di campionamento e numero di campioni	35
5.2.2	Metodo di identificazione e sintesi del regolatore	38
5.2.3	Traiettoria dell'asse	42
5.2.4	Segnale di ingresso	44
5.3	Preparazione dei dati	48
5.3.1	Rimozione dei dati non significativi	48
5.3.2	Prefiltraggio	49
5.3.3	Decimazione	52
5.4	Scelta della struttura dei modelli	53
5.5	Modifica delle stime ai fini del controllo	56
5.5.1	Riduzione dell'ordine	56
5.5.2	Ricampionamento	56
5.6	Validazione delle stime	59

5.7	Stima della funzione di trasferimento dell'anello di velocità chiuso	61
6	Controllo basato sull'identificazione	63
6.1	Introduzione	63
6.2	Struttura del regolatore di velocità	64
6.3	Sintesi del regolatore di velocità	65
6.4	Verifica dei risultati con l'identificazione	70
7	Esempio di identificazione di un asse meccanico	71
7.1	Introduzione	71
7.2	L'interfaccia utente <i>identUC</i>	73
7.3	Preparazione dell'asse	77
7.4	Esperimento	79
7.5	Stima	80
8	Conclusioni	85
A	Espressione della funzione limite nel dominio della frequenza	87
	Bibliografia	88

Sommario

La presente tesi di laurea affronta il problema dell'identificazione di assi meccanici movimentati da motori lineari, ed è stata promossa da Salvagnini Italia S.p.A., azienda leader nella produzione di macchinari per la lavorazione della lamiera. I motori lineari trovano impiego nei sistemi di Salvagnini Italia per le loro performance dinamiche e per l'elevata precisione nel posizionamento. Il controllo degli assi basato sull'identificazione consente di sfruttarne al massimo le caratteristiche.

L'identificazione degli assi meccanici presenta alcune difficoltà, dovute alla presenza di retroazione e di effetti non lineari. Questa tesi studia quale sia la loro influenza sui modelli stimati ed individua una procedura per ottenere una identificazione corretta.

I risultati ottenuti hanno portato alla realizzazione di un'interfaccia in ambiente Matlab per gestire della procedura di identificazione. I modelli stimati sono stati utilizzati come base per la sintesi del controllo dell'asse, che ne ha dimostrato l'affidabilità.

Capitolo 1

Introduzione

Il presente lavoro di tesi è stato promosso da Salvagnini Italia S.p.A., azienda leader nella produzione di sistemi flessibili per la lavorazione a freddo della lamiera, ed è stato svolto presso il laboratorio dello stabilimento di Sarego (VI).

I motori lineari sono considerati oggi la nuova frontiera nei sistemi di posizionamento. I sistemi di posizionamento tradizionali basati su motori rotativi necessitano di un riduttore e di un organo che trasformi il moto da circolare a rettilineo, come una cremagliera o una cinghia dentata. I motori lineari, invece, generano un moto rettilineo senza la necessità di trasmissione meccanica, perciò uniscono le migliori performance dinamiche ad una precisione nel posizionamento molto elevata.

I sistemi Salvagnini impiegano motori lineari sia per applicazioni di posizionamento che di inseguimento di profili. Il sistema di taglio laser *L2*, ad esempio, utilizza due motori lineari per posizionare la testa di focalizzazione sul piano di taglio. Il controllo dei motori è costituito da due anelli di regolazione: un anello di velocità ed uno di posizione. Attualmente l'anello di velocità è integrato nell'azionamento mentre l'anello di posizione è realizzato da una scheda di controllo proprietaria. Per sfruttare al massimo le prestazioni dinamiche degli assi si stanno sperimentando varie strutture di regolatori per portare anche l'anello di velocità sulla scheda proprietaria.

L'identificazione consente di ottenere una stima del modello dell'asse da utilizzare come base per la sintesi del regolatore. L'identificazione degli assi meccanici movimentati da motori lineari presenta alcune complicazioni, in parte dovute agli effetti non lineari, ma soprattutto dovute alla retroazione: le misure dell'asse, infatti, vanno sempre effettuate a catena chiusa per ov-

vie questioni di sicurezza. Questa tesi si occupa di chiarire quali condizioni consentano di giungere a delle stime affidabili. Una volta individuate le linee guida, si vuole realizzare un software di interfaccia che guidi l'utente nel procedimento di identificazione. Inoltre, per testare la qualità dei modelli, si farà la sintesi di un regolatore di velocità basato sulle stime.

Nel prossimo capitolo viene descritto il sistema utilizzato per le prove, mentre il terzo e quarto capitolo contengono dei richiami di teoria della stima parametrica. Il capitolo quinto tratta del problema dell'identificazione degli assi e raccoglie gran parte dei risultati conseguiti durante il lavoro di tesi. Il capitolo sesto presenta la sintesi di un regolatore basata sulle stime. Infine, il capitolo settimo presenta, a titolo d'esempio, l'identificazione di un'asse del sistema $L2$.

L'azienda

La Salvagnini, fondata nel 1963 dall'ing. Guido Salvagnini, produce macchine e sistemi completi per la lavorazione della lamiera sottile. I sistemi Salvagnini rappresentano una soluzione tecnologica avanzata per la punzonatura, cesoiatura e piega della lamiera, garantiscono massima precisione e ripetibilità di processo e una estrema flessibilità nella produzione. Caratteristica saliente degli impianti è di essere completamente automatici ed in grado di operare anche senza presidio. Un estremo grado di configurabilità permette di fornire una grande varietà di soluzioni a seconda delle esigenze del cliente, a partire da sistemi molto semplici fino ad impianti flessibili in grado di gestire carico e scarico da magazzini automatici. Ogni fase nel ciclo di produzione, dal disegno al prodotto finito, può essere gestita attraverso soluzioni CAD/CAM che generano automaticamente il programma per il controllo numerico. L'ottimizzazione delle prestazioni e la facilità d'uso dei sistemi Salvagnini è infatti garantita dal software e hardware proprietario. Lo sviluppo interno all'azienda di ogni componente chiave, dall'interfaccia operatore al controllo numerico, garantisce un completo presidio delle tecnologie dell'intero processo produttivo. Salvagnini annovera più di 2.000 sistemi operativi in circa 50 paesi di tutto il mondo, 12 società di vendita ed assistenza tecnica e 3 stabilimenti di produzione. Il Gruppo Salvagnini occupa 1.015 dipendenti, ed ha chiuso l'ultimo esercizio finanziario, il 2000/2001, con un fatturato di 176.500.000 Euro. La leadership tecnologica è garantita dai consistenti investimenti nel settore della ricerca e sviluppo e dall'innovazione del prodotto.

Capitolo 2

Assi meccanici movimentati da motori lineari

In questo capitolo vengono descritti gli assi meccanici movimentati da motori lineari, con riferimento al banco prova usato per le misure. Viene inoltre descritto il sistema di controllo *MicroMach*.

2.1 Il banco prova

Il banco prova motori lineari riproduce le condizioni di lavoro di un asse meccanico analogo a quelli installati sulle macchine Salvagnini. Si tratta di un motore lineare Etel LMC22-50, al cui elemento mobile è applicata una massa di ferro di circa 30 kg tramite un supporto in acciaio. Il motore è comandato da un azionamento Kollmorgen SERVOSTAR 620, ed è dotato di un trasduttore di posizione ottico lineare Renishaw RGH22 (per alcune misure Heidenhein LB 382). Il sistema di controllo utilizzato è un sistema proprietario chiamato *MicroMach*.

2.2 Il motore lineare

Un motore lineare è un particolare motore *brushless*. I magneti sono posti su una pista rettilinea, lungo la quale scorre un elemento mobile, sede di due o tre avvolgimenti (si veda la fig. 2.2). Le equazioni sono analoghe a quelle del motore *brushless*, opportunamente adattate al moto rettilineo.

Il motore lineare può essere controllato in corrente e in tensione (velocità): nel



Figura 2.1: Il banco prova motori lineari.

caso in esame il controllo di corrente viene svolto dall'azionamento, mentre la scheda di controllo assi del sistema *MicroMach* si occupa del controllo di velocità e posizione.

2.3 Funzione di trasferimento

La funzione di trasferimento tra l'ingresso (comando di corrente) e l'uscita (velocità del motore) normalmente contiene un polo, e almeno due coppie zero-polo risonanti. Il polo rende conto dell'inerzia della parte mobile e dell'attrito viscoso. Le risonanze sono dovute all'elasticità del carico e del supporto del motore, dato che il sistema non è rigido.

$$\frac{V_m(s)}{I_a(s)} = \frac{k(s^2 + 2\xi_{ar1}\omega_{ar1}s + \omega_{ar1}^2)(s^2 + 2\xi_{ar2}\omega_{ar2}s + \omega_{ar2}^2)}{(B + sJ)(s^2 + 2\xi_{r1}\omega_{r1}s + \omega_{r1}^2)(s^2 + 2\xi_{r2}\omega_{r2}s + \omega_{r2}^2)} \quad (2.1)$$

In figura 2.3 sono riportati i diagrammi di Bode della (2.1), per valori dei parametri tipici.

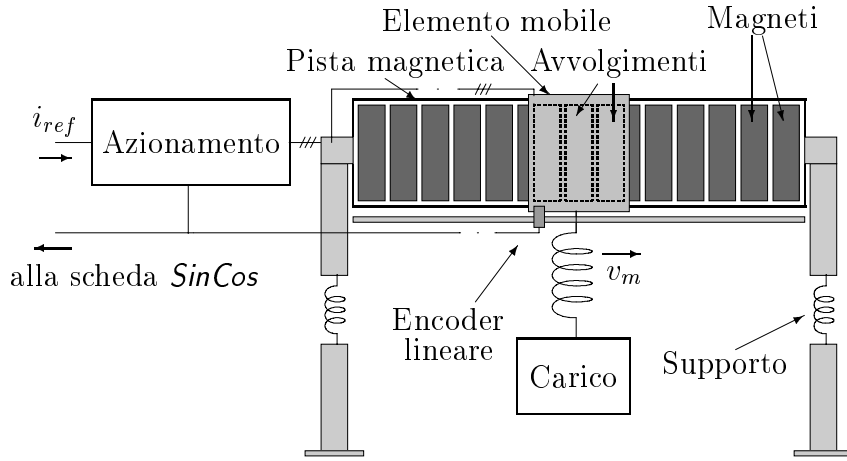


Figura 2.2: Schema di un asse meccanico movimentato da un motore lineare.

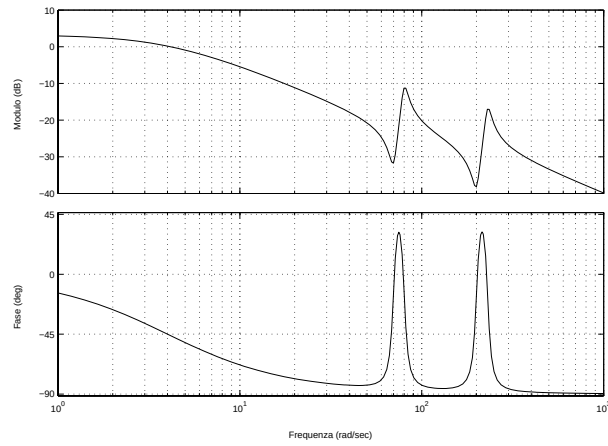


Figura 2.3: Esempio di funzione di trasferimento dell'asse ad anello aperto. Diagrammi di Bode (parametri: $k = 1$, $B = 0.1 \text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}$, $J = 0.4 \text{ kg}\cdot\text{m}$, $\omega_{r1} = 80 \text{ rad/s}$, $\omega_{ar1} = 70 \text{ rad/s}$, $\omega_{r2} = 230 \text{ rad/s}$, $\omega_{ar2} = 200 \text{ rad/s}$, $\xi_{r1} = \xi_{ar1} = \xi_{r2} = \xi_{ar2} = 0.04$).

2.4 Comportamenti non lineari

L'asse presenta delle non linearità, dovute alla struttura del motore e al carico. Gran parte dei metodi di identificazione falliscono se applicati a sistemi non lineari, quindi è opportuno cercare di far funzionare l'asse in modo che gli effetti non lineari possano essere trascurati. Segue una breve panoramica degli effetti più importanti.

Attrito L'attrito tra l'elemento mobile e la pista magnetica causa un comportamento non lineare negli istanti in cui l'elemento mobile raggiunge la velocità zero. Secondo il modello di Tustin, il disturbo di forza dovuto all'attrito è dato dall'espressione seguente, il cui andamento è riportato in figura 2.4.

$$F_a = (F_s - F_d(1 - e^{-|v|/v_c}) + F_v|v|)sgn(v)$$

Si riconoscono le seguenti componenti:

- attrito coulombiano: è una forza costante che si oppone al moto, data da $F_s - F_d$;
- attrito statico F_s , una forza costante che si oppone al moto dell'asse quando è fermo. Normalmente è maggiore della componente coulombiana;
- attrito viscoso: componente proporzionale alla velocità con coefficiente F_v ;

vi è inoltre una componente esponenziale che rende conto della diminuzione dell'attrito a basse velocità. Il comportamento non lineare è dovuto all'*offset* introdotto dalla componente coulombiana. Quindi, nel progetto di un esperimento per l'identificazione, è opportuno far muovere l'asse in modo che l'elemento mobile non si fermi e quanto meno inverta la direzione del moto.

Cogging È un disturbo di forza che deriva dall'interazione tra i magneti permanenti e le cave dell'elemento mobile, fortemente dipendente dai parametri di progetto del motore. Essendo i motori lineari asimmetrici dal punto di vista magnetico, non è facile ridurre questo effetto ricorrendo a delle compensazioni, come per i motori *brushless*. Trascurando la dinamica dell'anello

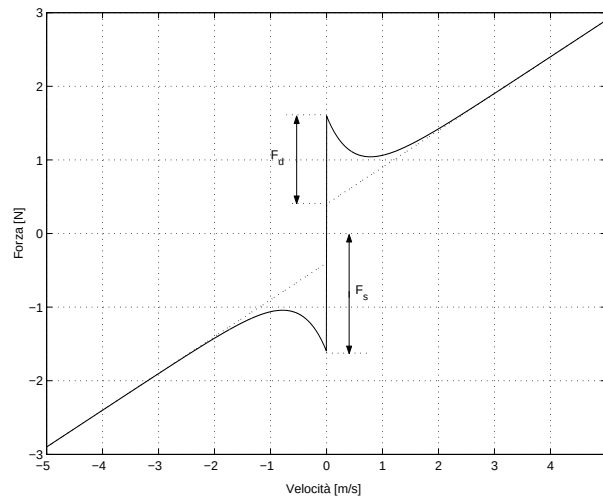


Figura 2.4: Modello dell'attrito di Tustin.

di corrente, il *cogging* si può schematizzare come un disturbo sinusoidale di corrente sovrapposto al segnale di comando:

$$i_{cog}(t) = A \sin[2\pi v_m(t)n_c]$$

dove $v_m(t)$ è la velocità della parte mobile, n_c è il numero di cave del motore per unità di lunghezza. Il coefficiente A dipende dalla velocità, all'aumentare della quale aumenta la frequenza della sinusoide e quindi l'effetto filtrante della massa agganciata alla parte mobile. A velocità sostenute, quindi, il *cogging* si avverte di meno. Si veda in figura 2.5 un esempio dell'andamento del disturbo.

Carico variabile In condizioni operative l'asse presenta delle asimmetrie nella struttura che ne modificano la risposta durante il funzionamento. Per tenerne conto si suppone che l'asse sia sottoposto ad un carico variabile. Alcuni esempi delle suddette asimmetrie sono:

- la catena portacavi che contiene i cavi di alimentazione dell'elemento mobile;
- la struttura non omogenea dell'asse;
- gli effetti magnetici di bordo alle estremità dell'asse.

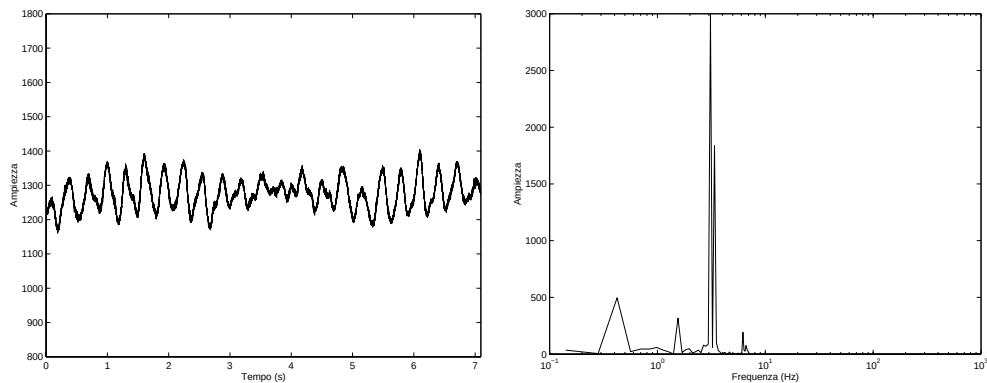


Figura 2.5: Il *cogging*. A sinistra: andamento nel tempo. A destra: spettro del segnale di sinistra calcolato mediante la trasformata di Fourier.

La catena portacavi esercita una trazione longitudinale che varia invertendo la direzione di marcia. Ciò che si ottiene è un guadagno variabile con la direzione e la velocità. L'elasticità dell'asse varia molto lungo la pista magnetica, quando l'elemento mobile si trova al centro dell'asse piuttosto che alle estremità.

2.5 Il sistema di controllo *MicroMach*

È una struttura multiprocessore modulare, adatta a gestire una singola macchina utensile così come un intero impianto industriale. Nella configurazione utilizzata, il sistema *MicroMach* si compone delle seguenti parti.

Host computer Si tratta di un PC workstation con sistema operativo Windows NT, su cui gira un'interfaccia utente chiamata *Syscon Shell*. Il suo compito è la gestione della produzione e la diagnostica dell'impianto.

Scheda real-time *RTMach* È il cuore del sistema *MicroMach*, ha il compito di coordinare e sincronizzare tutti i componenti. Si collega al *host* tramite rete *ethernet* ed è dotata di un bus VME a cui sono connessi vari dispositivi in modalità *slave*. La *RTMach* effettua un monitoraggio dell'impianto, raccogliendo i dati dai dispositivi *slave* per utilizzarli nella gestione di livello superiore.

Scheda di controllo assi *MachM+* Si occupa sia dell'asservimento degli assi che della generazione dei riferimenti. Può controllare fino a 6 assi, ma è possibile utilizzare più *MachM+* nella stessa *RTMach* qualora ne sia presente un numero maggiore. La *MachM+* è dotata di 8 DAC per la generazione dei segnali di controllo analogici, di vari ingressi ed uscite digitali per l'abilitazione e l'azzeramento degli assi e di un ingresso per un encoder digitale (non utilizzato nella configurazione adottata). Sono presenti due porte seriali per la comunicazione in remoto via terminale. Sulla scheda viene eseguito un processo, chiamato *monitor locale*, che permette di intervenire sugli assi direttamente, escludendo il controllo a livello superiore. Questa funzione è stata ampiamente utilizzata per creare al volo i regolatori di velocità richiesti dalla procedura di identificazione. La *MachM+* è dotata inoltre di un piccolo *filesystem* per la registrazione di misure ed il caricamento di segnali, che è possibile iniettare nei riferimenti.

Scheda *SinCos* È una scheda di input, ancora in fase di prototipo, che si occupa della lettura dei segnali provenienti da encoder analogici.

2.6 Modello dinamico del sistema di controllo

Il controllo dell'asse è effettuato mediante tre anelli di regolazione: un anello di corrente, uno di velocità ed uno di posizione. Il controllo di corrente viene svolto dall'azionamento senza alcuna possibilità di intervenire sui parametri, mentre i regolatori di posizione e velocità sono implementati dal software della scheda di controllo, quindi le loro funzioni di trasferimento $R_v(q)$ e $R_p(q)$ si possono scegliere arbitrariamente. In figura 2.6 è riprodotto uno schema a blocchi dell'intero sistema di controllo.

I riferimenti di posizione, velocità, accelerazione e jerk vengono generati dalla scheda di controllo assi, quindi possono essere iniettati nell'anello di regolazione in modo feedforward, se la dinamica del sistema lo richiede, mediante i guadagni k_v , k_a e k_j .

Vi sono inoltre due ingressi n_{iv} e n_{ip} tramite i quali è possibile sovrapporre al comando di corrente e al riferimento di velocità dei segnali di eccitazione, durante l'esperimento di identificazione.

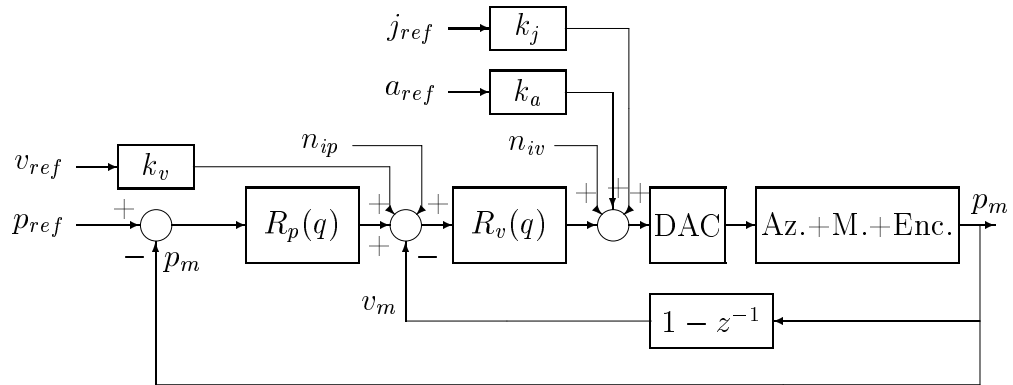


Figura 2.6: Schema a blocchi del sistema di controllo.

Capitolo 3

Stima Parametrica di Modelli Lineari

In questo capitolo vengono richiamati i concetti fondamentali dell'identificazione ad errore di predizione e vengono presentate le principali strutture di modelli usati nell'identificazione.

3.1 Introduzione

La costruzione di un modello matematico di un sistema fisico può avvenire in due modi. Il primo modo consiste nel suddividere il sistema in sottosistemi le cui proprietà siano note. Il modello del sistema complessivo si ottiene organizzando i sottosistemi in una struttura a blocchi e combinandoli matematicamente. Il secondo modo si basa sull'esperimento: ingresso e uscita del sistema vengono misurati per inferire un modello a partire dai dati. Il primo modo è detto *modellizzazione*, il secondo *identificazione*.

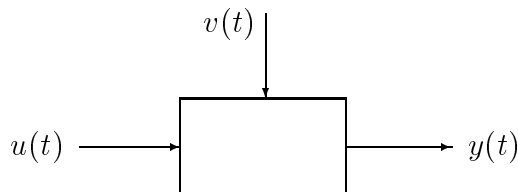


Figura 3.1: Sistema con disturbo.

L'identificazione si basa su un modello del sistema di tipo probabilistico. L'u-

scita $\{y(t)\}$ è composta da una parte perfettamente prevedibile, nota l'evoluzione dell'ingresso $\{u(t)\}$, e da una componente imprevedibile che dipende dal disturbo $\{v(t)\}$, dovuta sia ad errori di misura (rumore, derive, ecc.), che a veri e propri ingressi non controllabili direttamente (variazioni del carico, ecc.).

Limitandosi a considerare la classe dei sistemi lineari tempo-invarianti, è possibile “riportare all'uscita” i disturbi, raggruppandoli in un unico termine additivo, come illustrato in figura 3.2.

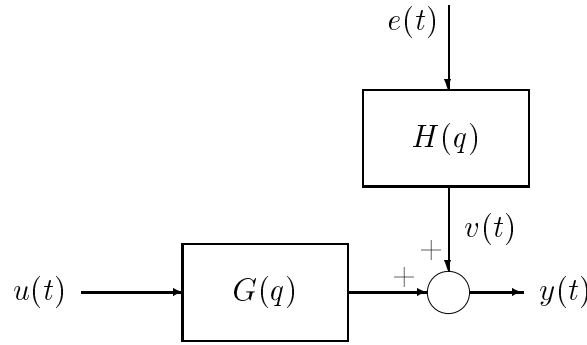


Figura 3.2: Modello con disturbo riportato all'uscita e rappresentazione di innovazione.

Supponendo che i disturbi siano modellabili come processi stazionari del second'ordine, spesso si descrive $\{v(t)\}$ mediante la sua *rappresentazione di innovazione*¹

$$v(t) = H(q)e(t) \quad (3.1)$$

dove $\{e(t)\}$ è rumore bianco gaussiano a media nulla e varianza λ ; $H(q)$ è un filtro ad inverso stabile, monico; q è l'operatore di traslazione nel tempo (ad es. $q^{-1}s(t) = s(t-1)$). $H(q)$ si dice anche *modello del rumore*.

L'identificazione, dunque, si compone di tre ingredienti fondamentali:

- un *set* di dati Z^N ;
- un insieme $\mathcal{M}$ di modelli candidati;

¹Si è implicitamente assunto che $\{v(t)\}$ sia un processo *puramente non deterministici*, vedi [Pic99a] cap. VI.

- un criterio di ricerca del migliore modello candidato, detto *metodo di identificazione*.

I dati consistono in campioni dei segnali di ingresso e uscita

$$Z^N = \{u(1), y(1), \dots, u(N), y(N)\}; \quad (3.2)$$

si suppone che vengano generati da un modello $\mathcal{S}$, detto *modello vero*, dato da

$$y(t) = G_0(q)u(t) + H_0(q)e(t) \quad (3.3)$$

con $G_0(q)$ causale; $\{e(t)\}$ rumore bianco gaussiano a media nulla e varianza λ_0 ; $H_0(q)$ filtro ad inverso stabile, monico.

L'insieme $\mathcal{M}$ è definito da una struttura di modelli, ad esempio da funzioni di trasferimento razionali o spazi di stato a dimensione finita. I coefficienti della struttura sono parametri da determinare; generalmente si indicano con il vettore θ .

La struttura dei modelli, quindi, si rappresenta nel modo seguente:

$$y(t) = G(q, \theta)u(t) + H(q, \theta)e(t) \quad (3.4)$$

con $G(q, \theta)$ causale, $\{e(t)\}$ bianco con varianza λ , $H(q, \theta)$ ad inverso stabile, monico e causale.

Il vettore θ varia in un dominio $D_{\mathcal{M}} \subset \mathbf{R}^d$, dove d è il numero dei parametri incogniti. Un particolare modello dell'insieme $\mathcal{M}$ si indica con $\mathcal{M}(\theta)$.

3.2 Identificazione ad Errore di Predizione

Una volta scelta la struttura dei modelli, si utilizza l'informazione contenuta nei dati per stimare il valore dei parametri. Questa sezione descrive il metodo di identificazione noto come *prediction error method (PEM)*.

3.2.1 Modelli e predizione

Un modello rappresenta un modo di predire i valori futuri dell'uscita. Si consideri la (3.1). Osservando $v(s)$ per $s \leq t-1$, è possibile predire il valore di $v(t)$

$$v(t) = H(q)e(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)e(t-k) = e(t) + \sum_{k=1}^{\infty} h(k)e(t-k). \quad (3.5)$$

Dato che $H(q)$ è invertibile, la conoscenza di $v(s)$, $s \leq t-1$ implica la conoscenza di $e(s)$, $s \leq t-1$. Quindi, al tempo $t-1$, il secondo termine della (3.5) è noto. Lo si indichi con $m(t-1)$:

$$m(t-1) = \sum_{k=1}^{\infty} h(k)e(t-k). \quad (3.6)$$

Se $\{e(t)\}$ è una sequenza di variabili indipendenti, identicamente distribuite e a media nulla, si può dire che, al tempo $t-1$, la densità di probabilità (a posteriori) di $v(t)$ è pari a quella di $e(t)$, traslata di $m(t-1)$. Quindi, volendo dare un valore unico come predizione di $v(t)$, si può prenderne il valor medio, che si calcola facendo l'*aspettazione condizionata* della (3.5). Dal momento che le $\{e(t)\}$ sono variabili indipendenti e a media nulla, si ottiene

$$\begin{aligned} \hat{v}(t|t-1) &= \sum_{k=1}^{\infty} h(k)e(t-k) = [H(q) - 1]e(t) = \\ &= [1 - H^{-1}(q)]v(t). \end{aligned} \quad (3.7)$$

In maniera analoga, dalle osservazioni per $s \leq t-1$ degli ingressi e delle uscite $\{u(s), y(s)\}$ del sistema

$$y(t) = G(q)u(t) + v(t) \quad (3.8)$$

è possibile ricavare un predittore di $y(t)$. Introducendo la (3.5) nella (3.8), e facendo la media condizionata, si ottiene

$$\begin{aligned} \hat{y}(t|t-1) &= G(q)u(t) + \hat{v}(t|t-1) = \\ &= G(q)u(t) + [1 - H^{-1}(q)]v(t) = \\ &= G(q)u(t) + [1 - H^{-1}(q)][y(t) - G(q)u(t)]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

L'errore di predizione, cioè la differenza tra il valore predetto ed il valore effettivamente assunto da y è

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= y(t) - \hat{y}(t|t-1) = \\ &= H^{-1}(q)[y(t) - G(q)u(t)] = e(t).\end{aligned}\quad (3.10)$$

Per una trattazione più approfondita si rimanda a [Lju99] cap. 3. In statistica Bayesiana, il valor medio condizionato dai dati osservati si chiama *stimatore massimo a posteriori (MAP)*. Si veda [Pic99a], 2.1.

3.2.2 Il PEM

Come si è visto nella sezione precedente, dato un modello è possibile ricavarne un predittore dei valori futuri dell'uscita. Preso un set di dati Z^N ed una famiglia di modelli $\mathcal{M}$, il *metodo di identificazione ad errore di predizione (PEM)* stima il modello di $\mathcal{M}$ per cui è minimo l'errore di predizione, basandosi sulle osservazioni Z^N . La struttura di riferimento è la (3.4).

Tramite le (3.9) e (3.10), si calcolano il predittore di un passo

$$\hat{y}(t|t-1, \theta) = H^{-1}(q, \theta)G(q, \theta)u(t) + [1 - H^{-1}(q, \theta)]y(t) \quad (3.11)$$

e l'errore di predizione

$$\varepsilon(t, \theta) = y(t) - \hat{y}(t|t-1, \theta) = H^{-1}(q, \theta)[y(t) - G(q, \theta)u(t)]. \quad (3.12)$$

L'errore di predizione descritto dalla (3.12) è un vettore di $\mathbf{R}^N$, quindi la sua “ampiezza” può essere misurata con una qualsiasi norma di $\mathbf{R}^N$. Per fissare le idee si consideri una norma quadratica.

Si applica all'errore di predizione un filtro lineare stabile

$$\varepsilon_F = L(q)\varepsilon(t, \theta). \quad (3.13)$$

La stima è definita da

$$\hat{\theta}_N = \arg \min_{\theta \in D_{\mathcal{M}}} V_N(\theta, Z^N) \quad (3.14)$$

$$V_N(\theta, Z^N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \frac{1}{2} \varepsilon_F^2(t, \theta). \quad (3.15)$$

3.2.3 Convergenza e consistenza

La convergenza del metodo è garantita dal seguente risultato fondamentale²:

Teorema 1 *Si definisca come segue la funzione limite*

$$\bar{V}(\theta) := \bar{E} \frac{1}{2} \varepsilon_F^2(t, \theta); \quad (3.16)$$

se $N \rightarrow \infty$, allora

$$\hat{\theta}_N \longrightarrow D_C := \arg \min_{\theta \in D_{\mathcal{M}}} \bar{V}(\theta) \quad (3.17)$$

con probabilità 1.

La stima, dunque, per $N \rightarrow \infty$, converge al modello di $\mathcal{M}$ che minimizza l'errore di predizione. Tale stima è la migliore approssimazione del sistema vero disponibile tra i modelli di $\mathcal{M}$.

Si supponga che la parametrizzazione di G ed H sia sufficientemente flessibile, così da contenere il modello vero $\mathcal{S}$. Sia θ_0 il valore dei parametri per cui

$$G(q, \theta_0) = G_0(q), \quad H(q, \theta_0) = H_0(q). \quad (3.18)$$

Si assuma inoltre che $\mathcal{M}(\theta_0)$ sia *globalmente identificabile* (ovvero $V_N(\theta_0, Z^N)$ abbia un minimo globale). Ci si può chiedere sotto quali condizioni le stime del PEM siano *consistenti*, cioè quando sia possibile recuperare il modello vero usando tale metodo. Vale il seguente risultato fondamentale.

Teorema 2 *Il PEM fornisce stime consistenti se l'esperimento di identificazione è informativo.*

La definizione di *esperimento informativo* si trova in [Lju99] 13.2. Essenzialmente si richiede che l'ingresso $u(t)$ sia quasi-stazionario ed abbia uno spettro $\Phi_u(\omega) > 0$ quasi ovunque.

3.2.4 Bias

In generale il modello vero non appartiene alla struttura dei modelli scelta, quindi il teorema 2 non vale. Si pensi, ad esempio, al caso in cui si identifichi

²Si veda [Lju99], cap. 8. Per una definizione dell'operatore $\bar{E}$ si veda [Lju99], (2.60).

un modello non lineare con una classe di modelli lineari. Ci si può chiedere in che senso la stima ottenuta approssima il modello vero.

Si consideri la caratterizzazione in frequenza della (3.16) nella sezione A in appendice. Per semplicità si assumano $\{u(t), e(t)\}$ indipendenti e si supponga di avere un modello del rumore fisso $H(q, \theta) = H_*(q)$. La (3.17) si particolarizza come segue

$$D_c = \arg \min_{\theta} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |G_0(e^{j\omega T}) - G(e^{j\omega T}, \theta)|^2 Q_*(\omega, \theta) d\omega; \quad (3.19)$$

$$Q_*(\omega, \theta) = \frac{\Phi_u(\omega)}{|H_*(e^{j\omega T})|^2}. \quad (3.20)$$

Sotto queste condizioni, il modello $G(e^{j\omega T}, \theta)$ è la migliore approssimazione in norma quadratica di $G_0(e^{j\omega T})$, pesata dal rapporto segnale/rumore Q_* .

Se il modello del rumore invece non è fisso, la (3.17) diventa

$$D_c = \arg \min_{\theta} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{|G_0 - G_{\theta}|^2 \Phi_u}{|H_{\theta}|^2} + \lambda_0 \frac{|H_0 - H_{\theta}|^2}{|H_{\theta}|^2} d\omega. \quad (3.21)$$

In generale il termine additivo è un contributo non nullo che “devia” la stima dalla migliore approssimazione in norma quadratica. Si dice che la stima presenta un *bias*. Nel caso in cui il modello del rumore sia parametrizzato in modo indipendente dal modello del sistema, la soluzione della (3.21) si ottiene minimizzando separatamente i due termini e quindi non si ha *bias*. Altrimenti, per ridurre l’effetto di “deviazione” è necessario disporre di una parametrizzazione del modello del rumore molto flessibile, in modo che $H_{\theta} \cong H_0$. Si veda [Lju99], 8.5.

3.2.5 Calcolo delle stime

Dal punto di vista computazionale, il metodo si configura come un problema di minimizzazione

$$\min_{\theta \in D_{\mathcal{M}}} V_N(\theta, Z^N). \quad (3.22)$$

In generale, la soluzione deve esser trovata con tecniche numeriche iterative di tipo *Gauss-Newton* o gradiente, per le quali è garantita la convergenza ad un punto di minimo (locale).

Tuttavia, quando il predittore può essere espresso mediante una *regressione lineare* dei dati, il problema (3.22) si riduce ad un problema di minimi quadrati:

$$\hat{y}(t|t-1, \theta) = \varphi^T(t)\theta \quad (3.23)$$

$$\varepsilon(t, \theta) = y(t) - \varphi^T(t)\theta \quad (3.24)$$

$$V_N(\theta, Z^N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \frac{1}{2} [y(t) - \varphi^T(t)\theta]^2 \quad (3.25)$$

$$\hat{\theta}_N = \min_{\theta \in D_{\mathcal{M}}} V_N(\theta, Z^N). \quad (3.26)$$

Il problema (3.26) ha una soluzione analitica, data da

$$\hat{\theta}_N = \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t)\varphi^T(t) \right]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t)y(t). \quad (3.27)$$

Il sistema di equazioni lineari (3.27), supposto che esista l'inversa della matrice indicata, si può risolvere efficacemente mediante la fattorizzazione QR.

Come vedremo nella prossima sezione, esistono particolari parametrizzazioni per le quali il predittore è una regressione lineare dei dati, quindi la stima si ottiene in modo estremamente efficiente.

Si veda [Lju99], 10.1 e 10.2.

3.2.6 Varianza asintotica

Una volta chiarite le proprietà di convergenza per $N \rightarrow \infty$, ci si può chiedere quanto velocemente le stime raggiungano il limite. A tale proposito richiamiamo brevemente alcuni risultati.

Sotto deboli ipotesi la variabile

$$\sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \theta^*) \quad (3.28)$$

è asintoticamente gaussiana, a media nulla. Si veda [Lju99] 9.2. L'espressione della covarianza asintotica, nel caso di norma quadratica e $\mathcal{S} \in \mathcal{M}$, è

$$\text{Cov}\hat{\theta}_N = \frac{\lambda_0}{N} \left[\bar{E} \left(\frac{d}{d\theta} \hat{y}(t|\theta) \right) \left(\frac{d}{d\theta} \hat{y}(t|\theta) \right)^T \right]^{-1}. \quad (3.29)$$

L'espressione (3.29) è il limite inferiore dato dalla disuguaglianza di Cramér-Rao, quindi la stima a minimo errore di predizione è asintoticamente efficiente. Si veda [Pic99b], 2.

La (3.29) permette di calcolare la varianza delle funzioni di trasferimento, che, nel caso di un modello *black-box*, è

$$\text{Cov} \begin{bmatrix} \hat{G}_N(e^{j\omega T}, \hat{\theta}_N) \\ \hat{H}_N(e^{j\omega T}, \hat{\theta}_N) \end{bmatrix} \approx \frac{n}{N} \cdot \Phi_v(\omega) \begin{bmatrix} \Phi_u(\omega) & \Phi_{ue}(-\omega) \\ \Phi_{ue}(\omega) & \lambda_0 \end{bmatrix}^{-1}. \quad (3.30)$$

Si veda [Lju99], 9.4. Ad anello aperto ($\Phi_{ue} = 0$), si ottengono le seguenti espressioni:

$$\text{Cov} \hat{G}_N(e^{j\omega T}) \approx \frac{n}{N} \frac{\Phi_v(\omega)}{\Phi_u(\omega)} \quad (3.31)$$

$$\text{Cov} \hat{H}_N(e^{j\omega T}) \approx \frac{n}{N} \frac{\Phi_v(\omega)}{\lambda_0}. \quad (3.32)$$

Si noti che le covarianze tendono asintoticamente alle (3.30), (3.31) e (3.32) al tendere all'infinito sia dell'ordine di G e H che del numero di campioni.

3.3 Modelli di Sistemi Lineari Tempo-Invarianti

Il modo più immediato di parametrizzare $G(q, \theta)$ ed $H(q, \theta)$ è la loro rappresentazione mediante funzioni di trasferimento razionali; i parametri sono i coefficienti dei polinomi a numeratore e denominatore. In questa sezione vengono presentate le principali famiglie di modelli utilizzate negli esperimenti.

3.3.1 Strutture ARX

Sono costituite da un'equazione lineare alle differenze che descrive il comportamento ingresso-uscita, a cui si somma un rumore bianco:

$$\begin{aligned} y(t) &+ a_1 y(t-1) + \cdots + a_{n_a} y(t-n_a) = \\ &= b_1 u(t-1) + \cdots + b_{n_b} u(t-n_b) + e(t). \end{aligned} \quad (3.33)$$

I parametri sono

$$\theta = [a_1 \quad \cdots \quad a_{n_a} \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{n_b}]^T. \quad (3.34)$$

Ponendo

$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_{n_a} q^{-n_a} \quad (3.35)$$

$$B(q) = b_1 q^{-1} + \cdots + b_{n_b} q^{-n_b} \quad (3.36)$$

si ottiene

$$G(q, \theta) = \frac{B(q)}{A(q)}; \quad H(q, \theta) = \frac{1}{A(q)}. \quad (3.37)$$

Il modello (3.33) si chiama ARX; AR si riferisce alla struttura autoregressiva $A(q)y(t) = e(t)$ ed X all'ingresso ulteriore $B(q)u(t)$.

La struttura del predittore di un passo si ottiene dalla (3.11):

$$\hat{y}(t|t-1, \theta) = B(q)u(t) + [1 - A(q)]y(t). \quad (3.38)$$

Introducendo il vettore

$$\varphi(t) = [-y(t-1) \cdots -y(t-n_a) \quad u(t-1) \cdots u(t-n_b)]^T \quad (3.39)$$

il predittore si può scrivere come una regressione lineare dei dati

$$\hat{y}(t|t-1, \theta) = \varphi^T(t)\theta. \quad (3.40)$$

Quindi, come già accennato nella sezione 3.2.5, il problema (3.22) si risolve in modo molto efficiente con una fattorizzazione QR. Questa proprietà è molto importante, dal momento che consente di ottenere delle stime in modo rapido e semplice.

Tuttavia, la struttura di tipo ARX non è la scelta più naturale dal punto di vista fisico, perchè, come illustrato in figura 3.3, il modello del rumore corrisponde all'inverso del denominatore di G . In qualche caso è preferibile adottare una parametrizzazione più flessibile.

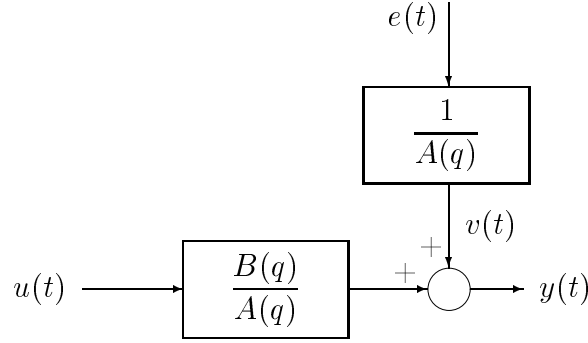


Figura 3.3: Struttura ARX.

3.3.2 Strutture ARMAX

Se si necessita di un modello più flessibile del disturbo, è possibile introdurre una media mobile del rumore bianco

$$\begin{aligned} y(t) &+ a_1 y(t-1) + \dots + a_{n_a} y(t-n_a) = b_1 u(t-1) + \dots \\ &+ b_{n_b} u(t-n_b) + e(t) + c_1 e(t-1) + \dots + c_{n_c} e(t-n_c). \end{aligned} \quad (3.41)$$

La parametrizzazione che si ottiene è detta ARMAX (Auto Regressive Moving Average with eXternal input).

I parametri sono

$$\theta = [a_1 \dots a_{n_a} \quad b_1 \dots b_{n_b} \quad c_1 \dots c_{n_c}]^T \quad (3.42)$$

Ponendo, oltre alle (3.35) e (3.36), la

$$C(q) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_{n_c} q^{-n_c} \quad (3.43)$$

si ottiene

$$G(q, \theta) = \frac{B(q)}{A(q)}; \quad H(q, \theta) = \frac{C(q)}{A(q)} \quad (3.44)$$

Il predittore di un passo, ricavato dalla (3.11) è

$$\begin{aligned} \hat{y}(t|t-1, \theta) &= \frac{B(q)}{C(q)} u(t) + \left[1 - \frac{A(q)}{C(q)}\right] y(t) = \\ &= B(q) u(t) + [1 - A(q)] y(t) + [C(q) - 1] \varepsilon(t, \theta). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Introducendo il vettore

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} -y(t-1) \cdots -y(t-n_a) & u(t-1) \cdots \\ u(t-n_b) & \varepsilon(t-1, \theta) \cdots \varepsilon(t-n_c, \theta) \end{bmatrix}^T \quad (3.46)$$

il predittore si può scrivere come

$$\hat{y}(t|t-1, \theta) = \varphi^T(t, \theta)\theta. \quad (3.47)$$

Nonostante la somiglianza con la (3.39), il predittore non è lineare in θ , per cui non è possibile ricondurre la stima di modelli ARMAX ad un problema di minimi quadrati come per i modelli ARX.

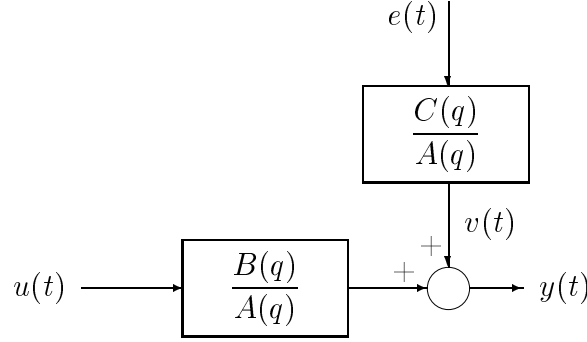


Figura 3.4: Struttura ARMAX.

3.3.3 Altre strutture

Le possibilità di parametrizzare $G(q, \theta)$ ed $H(q, \theta)$ tramite funzioni di trasferimento razionali sono molte. Ad esempio, utilizzando la struttura generalizzata

$$A(q)y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t), \quad (3.48)$$

si ottengono 32 famiglie di modelli, a seconda di quali tra i 5 polinomi vengono utilizzati. Tuttavia, scegliendo opportunamente i polinomi, è sempre possibile ricondursi ad una struttura ARMAX, che, quindi, è quella che consente la massima flessibilità nella parametrizzazione.

In ogni caso, il fatto che il modello del rumore abbia lo stesso denominatore di G , può sembrare innaturale da un punto di vista fisico e può sembrare più opportuno adottare parametrizzazioni indipendenti.

Se si modella il disturbo come un rumore bianco che agisce all'uscita, si ottiene la struttura *Output Error (OE)*, descritta da

$$y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t) + e(t) \quad (3.49)$$

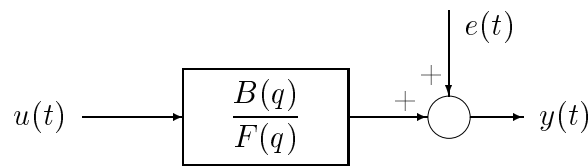
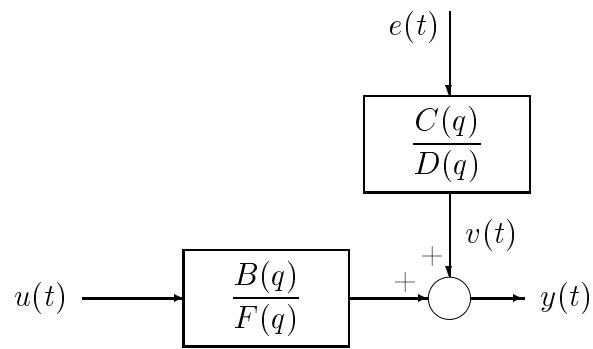


Figura 3.5: Struttura *Output Error*.

La struttura OE può essere resa più flessibile introducendo una parametrizzazione indipendente per il modello del rumore

$$y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t). \quad (3.50)$$

La struttura che si ottiene è stata introdotta e trattata da Box e Jenkins nel 1970 e porta il loro nome. Essa è la parametrizzazione più naturale dal punto di vista fisico, ma da un punto di vista computazionale comporta l'uso delle stesse tecniche numeriche iterative che si usano per i modelli ARMAX.

Figura 3.6: Struttura *Box-Jenkins*.

Capitolo 4

Identificazione di Sistemi a Retroazione

Gli assi meccanici movimentati da motori lineari sono sistemi molto difficili da azionare a catena aperta, per ovvie questioni di sicurezza. Gli esperimenti di identificazione devono perciò essere condotti ad anello chiuso: in questo capitolo vengono trattate le principali problematiche connesse all'identificazione di sistemi a retroazione.

4.1 Introduzione

Un tipico sistema a retroazione è descritto da

$$y(t) = G_0(q)u(t) + v(t) = G_0(q)u(t) + H_0(q)e(t) \quad (4.1)$$

$$u(t) = r(t) - K(q)y(t). \quad (4.2)$$

con $\{e(t)\}$ rumore bianco di varianza λ_0 . Si suppone che $G_0(q)$ o $K(q)$ contengano almeno un ritardo e che l'anello chiuso sia stabile.

Le equazioni ad anello chiuso sono

$$y(t) = G_0(q)S_0(q)r(t) + H_0(q)S_0(q)e(t) \quad (4.3)$$

$$u(t) = S_0(q)r(t) - K(q)H_0(q)S_0(q)e(t) \quad (4.4)$$

con

$$S_0(q) = \frac{1}{1 + K(q)G_0(q)}. \quad (4.5)$$

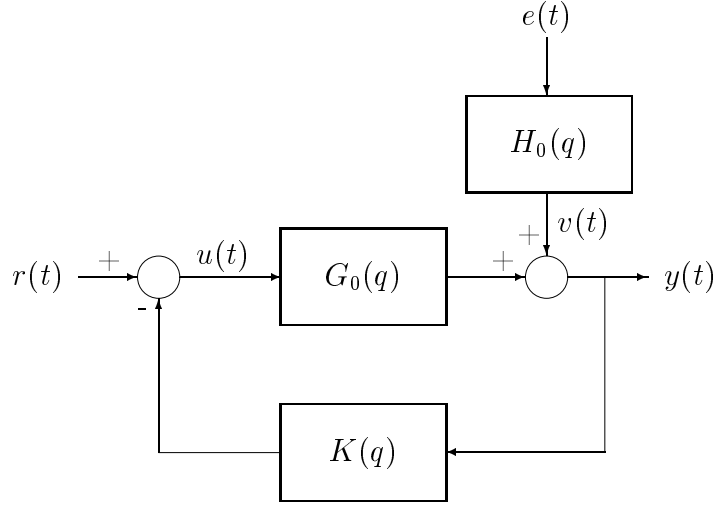


Figura 4.1: Schema a blocchi di un tipico sistema a retroazione.

Lo spettro del segnale di ingresso

$$\Phi_u = |S_0|^2 \Phi_r + |K|^2 |S_0|^2 \Phi_v = \Phi_u^r + \Phi_u^e \quad (4.6)$$

consta di due componenti, una dovuta al riferimento, l'altra dovuta al disturbo.

4.2 Identificabilità ad anello chiuso

L'identificazione ad errore di predizione si applica con successo anche ai sistemi a retroazione. I teoremi sull'identificabilità ad anello aperto visti alla sezione 3.2.3 valgono anche per i sistemi a retroazione, modificando opportunamente le ipotesi. Vanno invece rivisti gli aspetti di approssimazione del modello vero presentati nella sezione 3.2.4.

4.2.1 Convergenza e consistenza

Il teorema fondamentale di convergenza si applica anche ai dati presi ad anello chiuso. Il teorema sulla consistenza delle stime vale se la struttura dei modelli contiene il modello vero e se l'esperimento è informativo, anche se i dati sono presi ad anello chiuso.

Ciò che cambia è la definizione di esperimento informativo. Anche se $\{u(t)\}$ ha uno spettro positivo quasi ovunque, può non essere possibile recuperare il modello vero. Si veda [Lju99], 13.4. Affinchè un esperimento ad anello chiuso sia informativo è necessario che $\{r(t)\}$ sia quasi-stazionario ed abbia uno spettro $\Phi_r > 0$ quasi ovunque.

4.2.2 *Bias*

Si vuole studiare in che senso il modello approssimi il sistema vero, estendendo ai sistemi a retroazione quanto visto alla sezione 3.2.4.

Si consideri nuovamente la caratterizzazione in frequenza della (3.16) ricavata in appendice, alla sezione A. In questo caso $\{u(t), e(t)\}$ sono correlati, quindi $\Phi_{ue} \neq 0$.

Si supponga di avere un modello del rumore fisso $H(q, \theta) = H_*(q)$, in modo che la minimizzazione riguardi solo il primo termine della (A.6). L'insieme limite che si ottiene è

$$D_c = \arg \min_{\theta} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |G_0(e^{j\omega T}) + B(e^{j\omega T}) - G(e^{j\omega T}, \theta)|^2 Q_*(\omega, \theta) d\omega \quad (4.7)$$

$$|B(e^{j\omega T})|^2 = |H_0(e^{j\omega T}) - H(e^{j\omega T}, \theta)|^2 \frac{\lambda_0}{\Phi_u(\omega)} \frac{\Phi_u^e(\omega)}{\Phi_u(\omega)} \quad (4.8)$$

$$Q_*(\omega, \theta) = \frac{\Phi_u(\omega)}{|H_*(e^{j\omega T})|^2}. \quad (4.9)$$

La (4.8) si ottiene facilmente tenendo conto che

$$|\Phi_{ue}|^2 = |K|^2 |S_0|^2 |H_0|^2 \lambda_0^2 = \lambda_0 |K|^2 |S_0|^2 \Phi_v = \lambda_0 \Phi_u^e. \quad (4.10)$$

La (4.7) è analoga alla (3.19), tranne che per il termine di *bias* B . Il modello stimato tende ad approssimare in norma quadratica $G_0 + B$. La funzione peso Q_* è la stessa del caso ad anello aperto. Ciò che cambia è che un modello del rumore sbagliato fa “deviare” le stime dal modello vero.

La (4.8) mostra che B dipende dai seguenti fattori:

- bontà del modello del rumore $|H_0 - H_*|$;
- contributo del feedback allo spettro del segnale di ingresso Φ_u^e/Φ_u ;

- rapporto segnale/rumore Φ_u/λ_0 .

Da ciò segue che per poter trascurare il *bias* è necessario usare una parametrizzazione ragionevolmente flessibile e massimizzare il contributo in ingresso non dovuto al feedback.

4.2.3 Varianza asintotica

Si considerino le espressioni della varianza asintotica viste alla sezione 3.2.6; in particolare la (3.30), che si riferisce ad un modello *black-box*. Risolvendo il primo elemento a sinistra e l'ultimo a destra otteniamo

$$\text{Cov}\hat{G}_N = \frac{n}{N} \Phi_v(\omega) \cdot \frac{\lambda_0}{\lambda_0 \Phi_u(\omega) - |\Phi_{ue}(\omega)|^2} \quad (4.11)$$

$$\text{Cov}\hat{H}_N = \frac{n}{N} \Phi_v(\omega) \cdot \frac{\Phi_u(\omega)}{\lambda_0 \Phi_u(\omega) - |\Phi_{ue}(\omega)|^2} \quad (4.12)$$

e dalla (4.10) si ricavano facilmente

$$\text{Cov}\hat{G}_N = \frac{n}{N} \frac{\Phi_v(\omega)}{\Phi_u^r(\omega)} = \frac{n}{N} \frac{\Phi_v(\omega)}{\Phi_u(\omega)} \left[1 + \frac{\Phi_u^e(\omega)}{\Phi_u^r(\omega)} \right] \quad (4.13)$$

$$\text{Cov}\hat{H}_N = \frac{n}{N} \frac{\Phi_v(\omega)}{\lambda_0} \frac{\Phi_u(\omega)}{\Phi_u^r(\omega)} = \frac{n}{N} \frac{\Phi_v(\omega)}{\lambda_0} \left[1 + \frac{\Phi_u^e(\omega)}{\Phi_u^r(\omega)} \right]. \quad (4.14)$$

Si nota immediatamente che Φ_u^e contribuisce ad aumentare la varianza della stime rispetto alle espressioni ad anello aperto (3.31) e (3.32). Perciò per ridurre la varianza, è opportuno massimizzare la parte di ingresso non proveniente dal feedback. Si veda [GLdH01] per maggiori dettagli.

4.3 Approcci all'identificazione di sistemi a retroazione

Nelle sezioni precedenti si è implicitamente supposto di applicare il PEM direttamente, come in catena aperta. Si è visto che questo tipo di approccio fornisce stime consistenti se il modello vero appartiene alla struttura dei

modelli adottata. Tuttavia in letteratura si trovano dei metodi alternativi, che vengono brevemente discussi in questa sezione.

Si possono distinguere metodi che

- suppongono di non conoscere il feedback, né utilizzano il riferimento $\{r(t)\}$ anche se noto, detti metodi di *identificazione diretta*;
- suppongono di conoscere il regolatore (tipicamente lineare, nella forma (4.2)) ed il riferimento $\{r(t)\}$, detti metodi di *identificazione indiretta*;
- suppongono di non conoscere il feedback, utilizzano $\{r(t)\}$ per inferire il regolatore ed utilizzano la stima per recuperare il sistema. Sono detti metodi di *identificazione congiunta ingresso/uscita*.

4.3.1 Identificazione diretta

L'identificazione diretta si ottiene applicando il PEM direttamente ai dati di ingresso e di uscita, trascurando la presenza della retroazione. È la prima scelta da farsi tra i metodi di identificazione, in quanto

- si applica indipendentemente dal tipo di feedback presente;
- non richiede algoritmi o software appositi;
- fornisce stime consistenti se la struttura dei modelli contiene il modello vero.

L'unico svantaggio è che sono necessari di buoni modelli del rumore. Ad anello aperto si possono usare strutture tipo output error o con un modello del rumore fisso per ottenere stime consistenti, anche se non molto accurate (si veda 3.2.4), mentre, con dati presi ad anello chiuso, un modello del rumore che si discosti molto dal modello vero introduce *bias* (si veda 4.2.2).

La soluzione comunemente adottata consiste nello stimare modelli di ordine elevato, con poco *bias*, e ridurne poi l'ordine tramite minimizzazioni pesate nel dominio della frequenza, oppure mediante realizzazioni bilanciate.

4.3.2 Identificazione indiretta

Il sistema ad anello chiuso (4.3) è descritto da

$$y(t) = G_{cl}(q)r(t) + v_{cl}(q). \quad (4.15)$$

L'idea alla base dell'identificazione indiretta è di stimare G_{cl} dalle misure di y e r , e, noto il regolatore K , ricavare una stima della funzione di trasferimento ad anello aperto $\hat{G}$ da

$$\hat{G}_{cl} = \frac{\hat{G}}{1 + K\hat{G}}. \quad (4.16)$$

Ciò permette di ricondursi ad un problema di stima ad anello aperto, quindi di poter utilizzare anche parametrizzazioni con un modello fisso del rumore senza introdurre *bias*.

Il principale svantaggio è che gli eventuali errori in K si propagano direttamente su $\hat{G}$.

Il PEM consente di parametrizzare arbitrariamente G_{cl} , quindi è naturale mettere in relazione i parametri con la funzione di trasferimento ad anello aperto

$$G_{cl}(q, \theta) = \frac{G(q, \theta)}{1 + K(q)G(q, \theta)}. \quad (4.17)$$

In questo modo si può ricavare G immediatamente. La scelta della parametrizzazione è molto importante per evitare problemi numerici nella soluzione della (4.16), ma non cambia le proprietà statistiche della stima.

La varianza delle stime è espressa sempre dalla (3.30), quindi identica all'approccio diretto. Si veda [Lju99] 13.5 per maggiori dettagli.

4.3.3 Identificazione congiunta ingresso/uscita

Si considerino le equazioni ad anello chiuso (4.1) e (4.2). Supponendo che al riferimento sia sovrapposto un rumore $\{d(t)\}$ indipendente da $\{e(t)\}$, si definisce il *modello congiunto*

$$\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_0 S_0 \\ S_0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} H_0 S_0 & G_0 S_0 \\ -K H_0 S_0 & S_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ d \end{bmatrix} = \mathcal{G}r + v. \quad (4.18)$$

I metodi di identificazione che si applicano al modello congiunto si chiamano tecniche *congiunte ingresso/uscita*. Ve ne sono due varianti: la prima consiste nell'applicare il PEM direttamente al modello (4.18), mentre la seconda, assumendo $v = [v_1 \ v_2]^T$ con v_1 scorrelato da v_2 , consiste nell'applicare il PEM separatamente ai sistemi

$$y(t) = G_0 S_0 r(t) + v_1(t) = G_{cl} r(t) + v_1(t) \quad (4.19)$$

$$u(t) = S_0 r(t) + v_2(t) = G_{ru} r(t) + v_2(t) \quad (4.20)$$

e ricavare $\hat{G}$ da

$$\hat{G} = \frac{\hat{G}_{cl}}{\hat{G}_{ru}}. \quad (4.21)$$

Il calcolo si basa su cancellazioni tra $\hat{G}_{cl}$ e $\hat{G}_{ru}$, che comunque non avvengono per via dell'incertezza sulle stime, quindi $\hat{G}$ risulta di ordine inutilmente elevato. In alternativa si possono parametrizzare $\hat{G}_{cl}$ e $\hat{G}_{ru}$ in modo che $\hat{G}$ si ricavi direttamente dai parametri.

Una di queste, che corrisponde al metodo detto *two-stage*, consente di ricavare $\hat{G}$ mediante due stime successive: si parametrizzano in modo indipendente $S = S(q, \eta)$ e $G = G(q, \theta)$ e si stima $\hat{S} = S(q, \hat{\eta})$ da (4.20). Quindi, simulando il sistema

$$\hat{u}(t) = S(q, \hat{\eta})r(t) \quad (4.22)$$

si ricava il vettore $\hat{u}^t$. Infine, applicando il PEM al sistema

$$y(t) = G(q, \theta)\hat{u}(t) + v_1(t) \quad (4.23)$$

si ottiene $\hat{G}$.

In generale la varianza delle stime non ha una espressione semplice. Se le sequenze $u^t - \hat{u}^t$ e r^t sono scorrelate, è espressa dalla (3.30), quindi identica all'approccio diretto. La correlazione tra $u^t - \hat{u}^t$ e r^t aumenta la varianza deteriorando le stime. Per rendere $u^t - \hat{u}^t$ scorrelato da r^t si può parametrizzare S come un FIR non causale. Si veda [FL99], 5.3.

Capitolo 5

Identificazione di assi movimentati da motori lineari

Questo capitolo approfondisce il problema dell'identificazione di un asse meccanico, dal progetto dell'esperimento di identificazione alla validazione delle stime ottenute.

5.1 Introduzione

L'identificazione di un asse meccanico consiste nella sequenza di operazioni schematizzata in figura 5.1: mediante l'esperimento si acquisiscono i dati, che vengono preparati eliminando le componenti che non si vogliono modellare, quindi, scelta una famiglia di modelli, si individua quello che descrive meglio il sistema. A questo punto, il modello viene validato e, se non risponde a certi requisiti, si ripete la procedura da capo, variando alcune scelte. Alcune operazioni, come il calcolo delle stime, vengono svolte dal calcolatore mediante gli algoritmi visti nei precedenti capitoli. Altre si basano sulle scelte dell'utente e costituiscono l'argomento principale del presente capitolo.

Il sistema di riferimento è l'asse a motore lineare descritto al capitolo 2, che presenta le stesse caratteristiche degli assi installati sulle macchine prodotte dalla Salvagnini. L'asse è dotato di un sistema di controllo costituito da un anello di velocità e uno di posizione, secondo lo schema a blocchi riportato in figura 2.6.

Lo scopo dell'identificazione è stimare un modello dell'asse da utilizzare nella sintesi del sistema di controllo, costituito dai regolatori di velocità e posizione

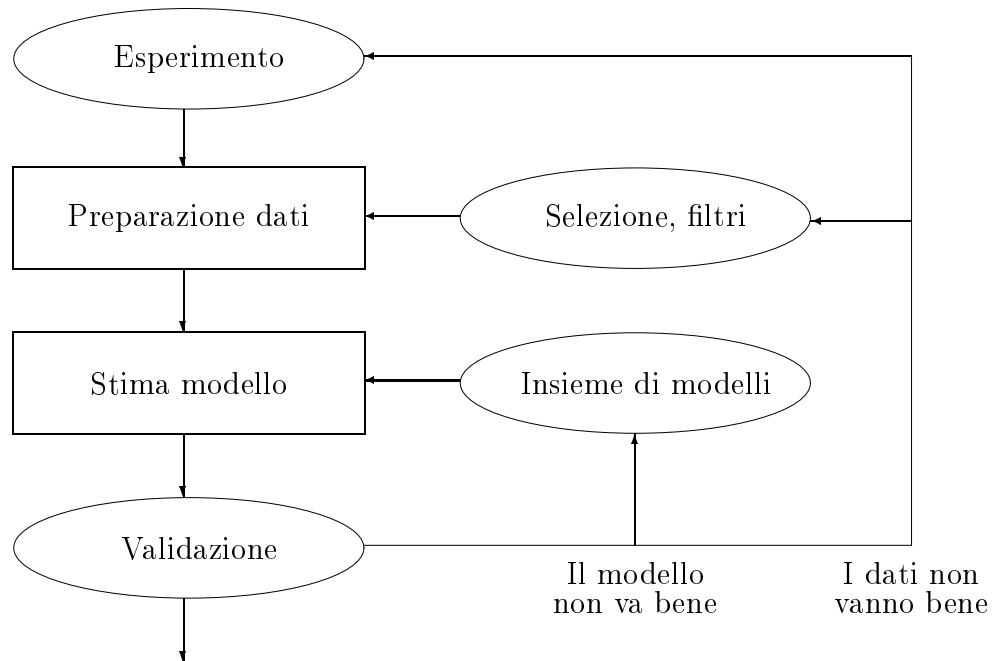


Figura 5.1: La procedura di identificazione. Le attività nei rettangoli vengono svolte dal calcolatore, le altre vengono svolte dall'utente.

R_v e R_p . I modelli da stimare, dunque, sono due: uno ha come ingresso il comando di corrente e come uscita la velocità dell'asse, l'altro ha come ingresso il riferimento di velocità e come uscita la posizione (o la velocità) corrente ad anello di velocità chiuso.

La stima del primo modello è la più problematica. Essa deve essere condotta a catena chiusa per poter controllare il movimento dell'asse, perciò si deve far ricorso alle tecniche introdotte al capitolo 4. Una volta effettuata la sintesi del regolatore di velocità, la stima del secondo modello può essere effettuata a catena aperta, in modo molto più semplice.

Il capitolo riguarda principalmente la stima del primo modello, al secondo è dedicato un paragrafo in coda.

5.2 Progetto dell'esperimento

Il punto di partenza della procedura di identificazione è l'esperimento. Spesso è l'attività più dispendiosa in termini di tempo ed economici, perciò va curato

con molta attenzione, in modo da non dover ripetere le misure.

Per stimare la funzione di trasferimento che va dal comando di corrente alla velocità dell'asse, è necessario condurre l'esperimento ad anello di velocità chiuso, per evitare che l'asse si muova in modo incontrollato. Poiché però la presenza del feedback inevitabilmente modifica il comportamento del sistema, il regolatore R_v deve avere una dinamica lenta, appena sufficiente a controllare l'asse. La struttura del sistema da identificare è quella rappresentata in figura 5.2. L'ingresso u è dato dalla somma del segnale n_{iv} con il segnale di comando uscente dal regolatore R_v .

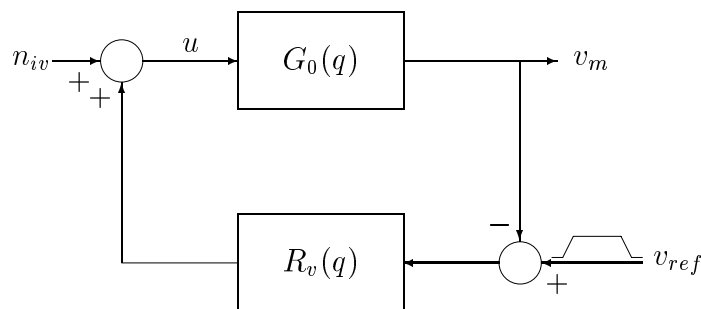


Figura 5.2: Schema a blocchi del sistema da identificare.

Il progetto dell'esperimento di identificazione consiste nel fissare le seguenti variabili:

- il tempo di campionamento T e il numero di campioni N ;
- la funzione di trasferimento $R_v(q)$ del regolatore di velocità;
- il riferimento v_{ref} , cioè la traiettoria da far compiere all'asse;
- il segnale di ingresso n_{iv} .

Nei prossimi paragrafi vedremo in che modo esse influenzino il buon esito della procedura di identificazione.

5.2.1 Tempo di campionamento e numero di campioni

Ai fini dell'identificazione, il tempo di campionamento gioca un ruolo molto importante, perché influisce sulla distribuzione del *bias* e quindi sulla bontà

dei modelli stimati. Come vedremo, un tempo di campionamento troppo piccolo tende a peggiorare la qualità delle stime in bassa frequenza.

Si consideri per semplicità un esperimento ad anello aperto. L'influenza del tempo di campionamento sulle stime è illustrata dalla (3.19), che qui riportiamo per comodità

$$\theta^* = \arg \min_{\theta} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |G_0(e^{j\omega T}) - G(e^{j\omega T}, \theta)|^2 Q(\omega, \theta) d\omega. \quad (5.1)$$

Si noti che, se si riduce T , aumenta l'intervallo di frequenze su cui si fa l'integrale. La funzione peso $Q(\omega, \theta)$ ha la seguente espressione

$$Q(\omega, \theta) = \frac{\Phi_u(\omega)}{|H(e^{j\omega T})|^2}, \quad (5.2)$$

Supponiamo per semplicità che u sia rumore bianco ($\Phi_u \equiv 1$). Se $H(e^{j\omega T})$ ha un comportamento passa-basso, $Q(\omega, \theta)$ pesa maggiormente le componenti a frequenza più alta, quindi le stime tendono ad essere molto accurate in alta frequenza e molto grossolane in bassa frequenza. Questo comportamento è dovuto al fatto che $H(e^{j\omega T})$ è un passa-basso e quindi è molto ben visibile nei modelli di tipo ARX, in cui $H(e^{j\omega T}) = 1/A(e^{j\omega T})$, ma si nota anche utilizzando altre parametrizzazioni.

Il problema si può risolvere in due modi: evitando di pesare i dati con l'inverso del modello del rumore od aumentando il tempo di campionamento, in modo da ridurre le differenze di peso tra le componenti.

La prima delle due soluzioni, come vedremo in 5.3.2, si può ricondurre ad un problema di prefiltraggio dei dati. Applicando ai dati di ingresso e uscita un filtro lineare $L(q) = H^{-1}(q)$, si ha

$$Q(\omega) = \Phi_u(\omega) = 1, \quad (5.3)$$

e quindi tutte le frequenze vengono pesate allo stesso modo. Si veda in figura 5.4 un confronto tra due modelli ottenuti con e senza prefiltro.

La seconda soluzione consiste nell'aumentare il tempo di campionamento. In questo modo viene ridotto l'intervallo di integrazione nella (5.1), e quindi anche la differenza di peso relativa tra le componenti. Si veda un esempio di stime a tempi di campionamento diversi in figura 5.3. Si ricordi che, per evitare il fenomeno dell'*aliasing*, è necessario utilizzare un prefiltro che elimini le componenti superiori alla frequenza di Nyquist. Per approfondire l'argomento, si rinvia a [Lju99, 13.7] e [WL86].

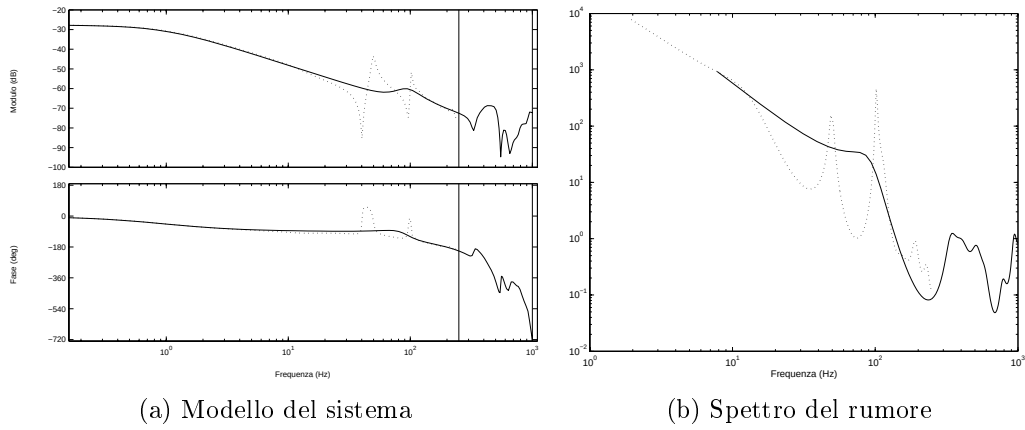


Figura 5.3: Confronto tra due stime basate su un modello ARX di ordine 20: una (linea continua) è ottenuta dai dati acquisiti, l'altra (linea tratteggiata) è ottenuta ricampionando i dati con un fattore 4.

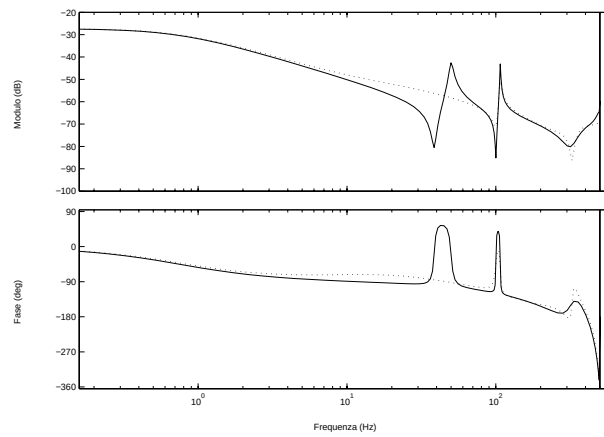


Figura 5.4: Confronto tra due stime basate su un modello ARMAX di ordine 10: la linea tratteggiata rappresenta la stima ottenuta nel modo classico, la linea continua quella ottenuta evitando di pesare le frequenze con l'inverso del modello del rumore.

Si noti che, per cambiare il tempo di campionamento, non è necessario ripetere l'esperimento, bensì si possono decimare i dati acquisiti. Nel caso in cui si stia facendo una stima per progettare un regolatore, il tempo di campionamento del modello deve essere lo stesso del controllo, quindi se si sono campionati i dati può essere necessario ricampionare il modello stimato, per riportare il tempo di campionamento al valore di partenza.

Se l'esperimento ha una durata limitata T_N , scelto un numero minimo di campioni N da acquisire, il tempo di campionamento è limitato superiormente da $T_N = N \cdot T$. Se, come spesso accade, non è possibile scegliere arbitrariamente T , bisogna effettuare l'esperimento ad un tempo di campionamento imposto e fissare la durata in base al numero di campioni che si vogliono acquisire. Se si ottengono stime scarsamente significative alle basse frequenze, si può ripetere l'algoritmo applicandolo a versioni campionate dei segnali di ingresso e uscita.

Per quanto riguarda la scelta del numero di campioni N , può essere utile richiamare il risultato asintotico (3.30), che da il rapporto tra l'ordine del modello e il numero di campioni necessario per ottenere una data precisione, fissati gli spettri dei segnali in gioco.

5.2.2 Metodo di identificazione e sintesi del regolatore

Nel capitolo 4 sono stati presentati vari tipi di approcci al problema dell'identificazione di un sistema a retroazione:

- l'*identificazione diretta* consiste nell'applicare l'algoritmo di stima ignorando il feedback;
- nell'*identificazione indiretta* si utilizza la conoscenza del regolatore per ricavare la stima;
- con l'*approccio congiunto ingresso/uscita* si stima sia il sistema che il regolatore.

La possibilità di fissare arbitrariamente la funzione di trasferimento del regolatore consente di poter applicare tutti e tre gli approcci.

La prima scelta, per la sua semplicità, è l'approccio *diretto*, che fornisce stime consistenti se si utilizza una parametrizzazione con un buon modello del rumore. Per ridurre la varianza delle stime, espressa dalle (4.13) e (4.14),

bisogna minimizzare il contributo all'ingresso dovuto al feedback. Perciò si utilizza un regolatore a bassa banda, in modo da ottenere

$$S_0 = [1 + R_v G_0]^{-1} \approx 1 \quad (5.4)$$

$$\Phi_u = |S_0|^2 (\Phi_r + |R_v|^2 \Phi_v) \approx \Phi_r \quad (5.5)$$

a tutte le frequenze. I risultati ottenuti identificando l'asse con l'approccio diretto si sono rivelati migliori di quelli ottenuti con gli altri due approcci. Il problema del *bias* può essere risolto utilizzando parametrizzazioni di ordine elevato (16-20), che quindi abbiano un modello del rumore abbastanza flessibile.

La conoscenza del meccanismo di feedback fa pensare che si possa trarre qualche vantaggio dall'utilizzo dell'approccio *indiretto*. Si noti che tale metodo è a catena aperta, quindi non ha problemi di *bias* come il metodo diretto. Non disponendo di un software adeguato, non è stato possibile parametrizzare la funzione di trasferimento ad anello chiuso usando la (4.17), in modo da ricavare direttamente la stima, bensì si è dovuto ricorrere alla (4.16). I risultati, specie se confrontati con quelli ottenuti con l'approccio diretto, non sono stati soddisfacenti. La scarsa precisione in bassa frequenza della stima di G_{cl} causa un comportamento anomalo nelle stime di G calcolate tramite la (4.16). Si veda in figura 5.5 un esempio di ciò che si ottiene.

Neppure l'approccio di tipo *congiunto ingresso/uscita* ha dato risultati accettabili. Applicando la variante *two-stage*, si sono riscontrati i problemi numerici accennati in 4.3.3, in quanto non intervengono cancellazioni nel calcolo della (4.21). In figura 5.6 sono confrontate le stime ottenute mediante l'approccio diretto, con quelle ottenute mediante l'approccio congiunto ingresso/uscita nella variante *two-stage*.

In base alle (4.13) e (4.14), per minimizzare la covarianza delle stime, si deve ridurre al minimo il contributo all'ingresso dovuto al feedback. Quindi conviene utilizzare regolatori a bassa banda, con una dinamica appena sufficiente a governare l'asse. Ad esempio, nelle prove effettuate, si sono utilizzati regolatori con banda $1 \div 2$ Hz. In figura 5.7 sono messe a confronto due stime fatte con il metodo diretto, una con regolatore con banda di 1 Hz, l'altra con un regolatore con banda 10 Hz.

Per fare la sintesi del regolatore R_v è necessario disporre di un modello semplificato dell'asse, che si può ricavare, ad esempio, dalla risposta dell'asse ad un gradino di corrente. Per maggiori dettagli si rinvia al capitolo 7, dove è riportato un esempio di identificazione di un asse meccanico. Si veda in figura 5.8 un esempio di misura della risposta al gradino.

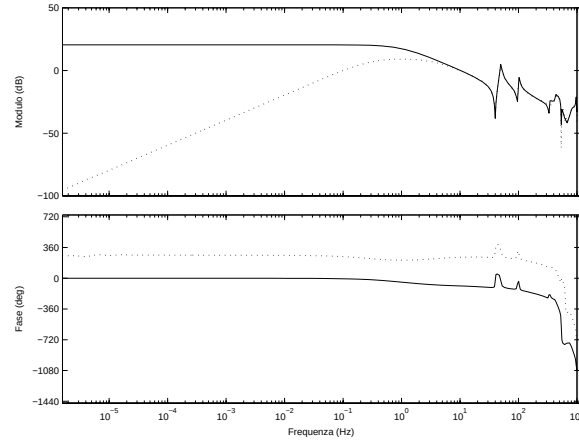


Figura 5.5: Confronto tra l'approccio diretto (linea continua) e indiretto (linea tratteggiata). Entrambe le stime sono basate su un modello ARMAX di ordine 20. La funzione di trasferimento del regolatore è $R_v(z) = 0.3(z - 0.999)/(z - 1)$.

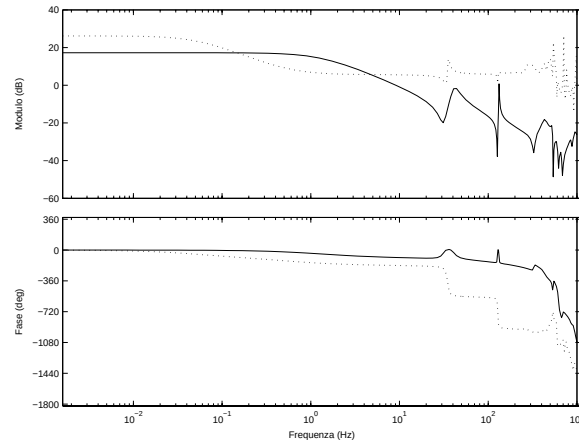


Figura 5.6: Confronto tra l'approccio diretto (linea continua) e l'approccio congiunto ingresso/uscita. Le stime sono basate su modelli ARMAX di ordine 20. La funzione di trasferimento del regolatore è $R_v(z) = 0.41185(z - 0.999)/(z - 1)$.

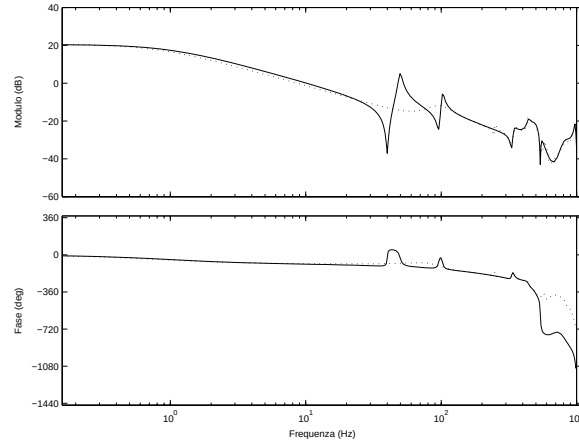


Figura 5.7: Confronto tra stime in modo diretto con regolatori con banda 1 Hz (continuo) e 10 Hz (tratteggiato). Le stime sono basate su un modello ARMAX di ordine 20, le funzioni di trasferimento dei regolatori sono rispettivamente $R_{v1}(z) = 0.3(z - 0.999)/(z - 1)$ e $R_{v10}(z) = 2.7(z - 0.999)/(z - 1)$.

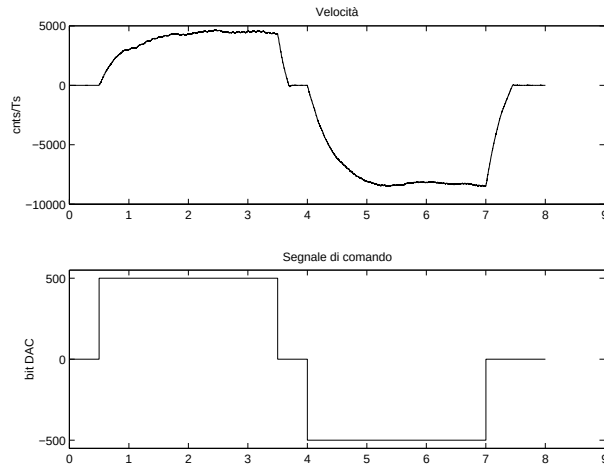


Figura 5.8: Misura della risposta al gradino. La velocità è espressa in impulsi per tempo di campionamento: l'encoder conta 512000 impulsi per millimetro, il tempo di campionamento è 0.5 ms. Si noti la grande diversità di guadagno nel cambio di direzione.

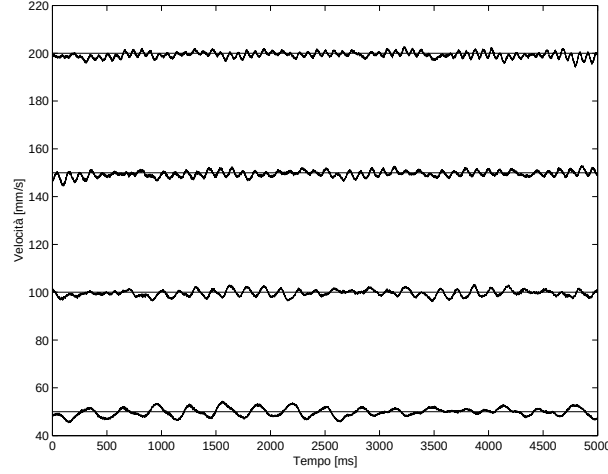


Figura 5.9: Effetto del *cogging* misurato all'uscita dell'asse. Le linee orizzontali indicano il riferimento in ingresso al regolatore di velocità.

5.2.3 Traiettorie dell'asse

Durante l'esperimento di identificazione l'asse viene mantenuto in movimento a velocità costante, per attenuare gli effetti non lineari visti al capitolo 2.

Il problema principale è costituito dall'attrito, che introduce una non linearità del tipo “a zona morta” quando si raggiunge velocità zero (si veda la figura 2.4). Perciò, anche se si è impostata una velocità di riferimento piuttosto alta, è sempre bene controllare che l'asse non si fermi durante l'esperimento, grazie alla sovrapposizione tra il segnale di comando e il segnale n_{iv} .

Un altro problema è dato dal *cogging*, che appare come una oscillazione persistente sui segnali misurati. Si individua facilmente in quanto la sua frequenza varia con la velocità (si veda la figura 5.9) ed è espressa da

$$f_{cog}(t) = n_c v_m(t). \quad (5.6)$$

Il motore del banco prova ha un passo polare di 16 mm ($n_c = 0.0625 \text{ mm}^{-1}$), quindi per velocità da 50 a 200 mm/s si osserva una oscillazione a frequenza compresa tra 3.1 e 12.5 Hz.

Ai fini del controllo dell'asse, il *cogging* può essere visto come un disturbo di coppia con una dinamica abbastanza lenta. Poiché verrà compensato dal regolatore che si sta costruendo, non c'è alcun interesse a ricavarne un modello accurato. Quando è possibile si cerca di scegliere una velocità di riferimento sufficientemente alta (ad es. 200 mm/s), in modo che venga filtrato dalla

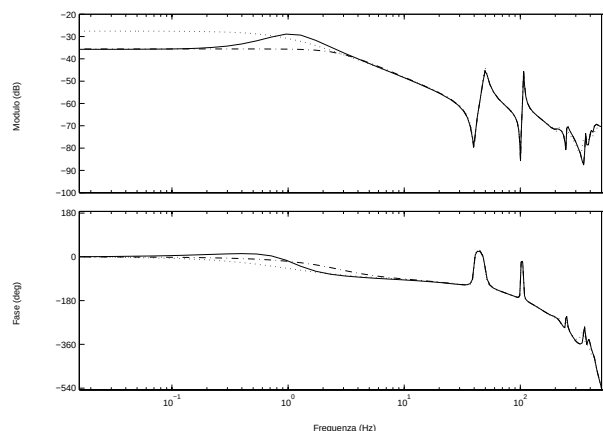


Figura 5.10: Effetto del *cogging* sulle stime. Il modello rappresentato con una linea continua è stato ottenuto da un esperimento condotto a 50 mm/s. Si noti il comportamento anomalo in bassa frequenza, che scompare aumentando la velocità (modello tratteggiato, 200 mm/s) o utilizzando un filtro elimina banda (modello punto-linea). La funzione di trasferimento del filtro è rappresentata in figura 5.11. Si noti la variazione del guadagno statico con l'aumento della velocità. Le stime sono basate su modelli ARMAX di ordine 20, il tempo di campionamento è 1 ms.

massa del carico. Molto spesso il fatto che le stime tendano ad essere migliori in alta frequenza, già discusso in 5.2.1, è sufficiente a far sì che l'effetto del *cogging* non appaia. In tutti gli altri casi si può rimuovere il disturbo applicando ai dati di ingresso e uscita un filtro elimina banda. Si veda l'esempio dell'effetto del *cogging* sulle stime rappresentato in figura 5.10. Le possibilità offerte dal prefiltraggio dei dati verranno viste più avanti, in 5.3.2.

Al capitolo 2 si è detto che il guadagno statico varia cambiando la velocità: questo effetto probabilmente si deve all'attrito ed è presente in qualsiasi condizione di funzionamento dell'asse. Ai fini del controllo si può trascurare, perché riguarda solo le basse frequenze; sopra una certa frequenza la dipendenza dalla velocità scompare. Tuttavia questi risultati vanno sempre verificati facendo stime a velocità diverse.

Riassumendo: fissata la zona dell'asse di cui si vuole stimare un modello, si sceglie la velocità di riferimento sulla base del numero di campioni che si vogliono acquisire e dello spazio disponibile, ad esempio

$$\frac{1000 \text{ mm}}{200 \text{ mm/s} \cdot 0.5 \text{ ms}} = 10000 \text{ campioni.}$$

Se si nota l'effetto del *cogging* sulle stime, lo può eliminare ricorrendo ad un

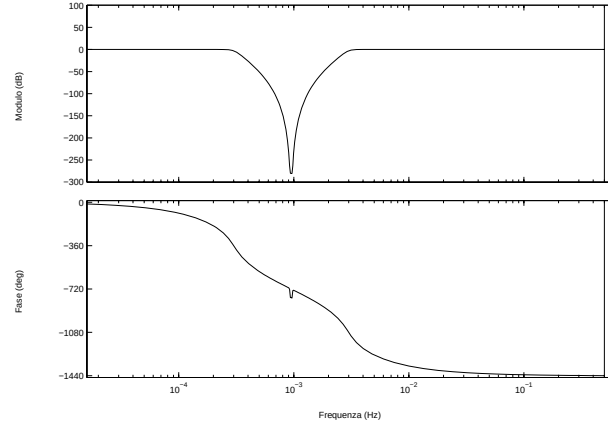


Figura 5.11: Il filtro di Butterworth di ordine 8, elimina banda da 0.3 a 3 Hz, utilizzato per eliminare l'effetto del *cogging*.

filtro elimina banda. È molto importante controllare che l'asse non si fermi mai durante tutto l'esperimento per evitare che l'attrito introduca una non linearità.

5.2.4 Segnale di ingresso

Lo scopo del segnale n_{iv} è di sollecitare il sistema, in modo che i dati raccolti permettano di discriminare tra due modelli diversi all'interno di una stessa classe.

Il segnale n_{iv} deve essere limitato in ampiezza

$$n_{min} \leq n_{iv} \leq n_{max}, \quad (5.7)$$

in quanto viene iniettato nel segnale di comando, ed avere una potenza elevata, in modo da sollecitare bene il sistema. Per valutare la potenza del segnale tenendo conto della limitazione in ampiezza si utilizza il *crest factor*

$$C_r^2 = \frac{\max_t u^2(t)}{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u^2(t)}. \quad (5.8)$$

Sono migliori i segnali con un basso *crest factor*.

Il segnale n_{iv} può essere sia un processo aleatorio, (p.es. rumore bianco gaussiano), sia un segnale periodico, (p.es. una somma di sinusoidi), ma si tenga

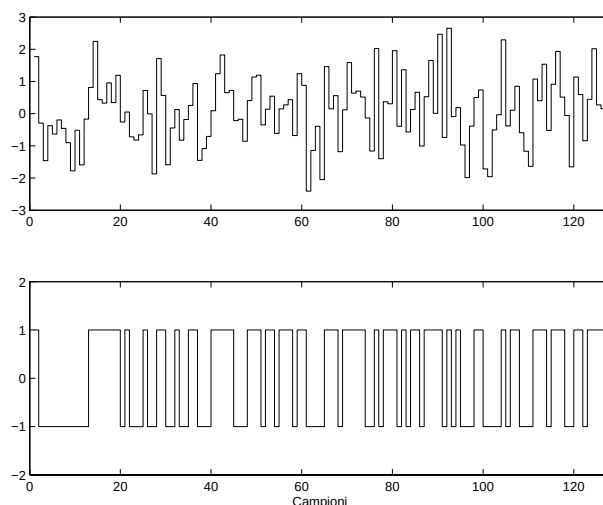


Figura 5.12: In alto: rumore bianco gaussiano, media nulla e varianza unitaria. In basso: segnale random binario, ottenuto prendendo il segno del segnale nel diagramma in alto.

presente che le proprietà asintotiche delle stime (*bias* e covarianza) dipendono solamente dallo spettro del segnale, non dal suo andamento effettivo. Perciò sono migliori quei segnali che permettono un certo controllo sulla forma dello spettro. Segue una breve panoramica dei segnali di ingresso più comuni.

Rumore bianco gaussiano La scelta più naturale è utilizzare come segnale di ingresso un rumore bianco gaussiano a media nulla. Mediante un filtro lineare è possibile ottenere teoricamente qualsiasi spettro. Esso non è limitato in ampiezza, quindi va saturato. Ad esempio, saturando il segnale a $\pm 3\sigma$, si ha $C_r = 3$ e mediamente solo l'1% dei punti viene modificato.

Segnale random binario Con questo nome si indica una sequenza di variabili casuali a media nulla che possono assumere solo due livelli. Lo si può ottenere prendendo il segno di un rumore bianco gaussiano. Il principale vantaggio nell'utilizzo di segnali binari è che sono limitati in ampiezza ed hanno potenza massima: il loro *crest factor* è pari a 1, quindi minimo. In compenso, non è facile sagomare lo spettro del segnale come il rumore bianco gaussiano, mediante dei filtri lineari.

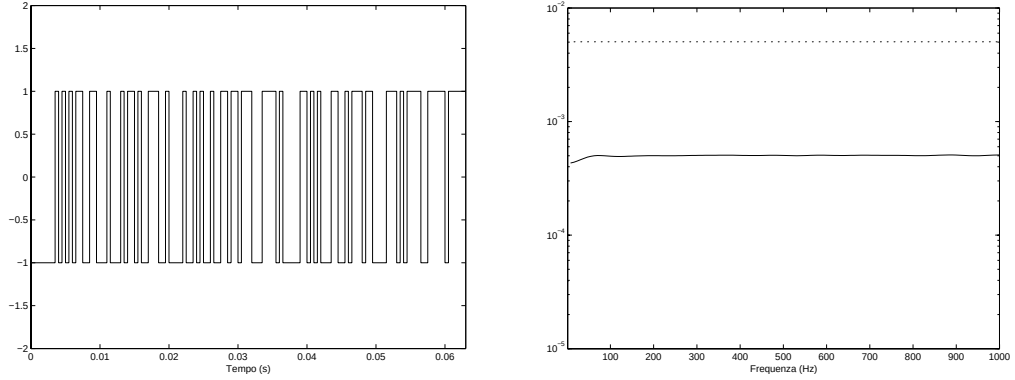


Figura 5.13: A sinistra: PRBS di ordine $n = 7$ e periodo $M = 127$. A destra: spettro del segnale di sinistra, calcolato mediante la trasformata di Fourier e tramite l'analisi spettrale.

Segnale binario pseudo-random (PRBS) Il segnale binario pseudo-random è un segnale deterministico periodico, che presenta delle proprietà simili al rumore bianco. Inoltre, essendo un segnale binario, ha un *crest factor* ottimale. È generato da un'equazione alle differenze come la seguente

$$u(t) = \text{mod}_2(a_1 u(t-1) + \dots + a_n u(t-n)), \quad (5.9)$$

dove mod_2 indica il resto della divisione per due. La soluzione generica di tale equazione è una sequenza binaria di periodo massimo 2^n (il numero di valori assumibili dagli ingressi passati $[u(t-1) \dots u(t-n)]$). Escludendo il caso in cui gli n ingressi passati siano tutti nulli, il periodo massimo è pari a

$$M = 2^n - 1. \quad (5.10)$$

Con PRBS si intendono le sequenze di periodo massimo. I valori dei coefficienti a_i per cui si ottengono sono tabulati.

Realizzare in pratica un generatore di sequenze pseudo-random è semplicissimo: è sufficiente uno *shift register* di n bit, al cui ingresso viene posto l'OR esclusivo dei *bit* corrispondenti ai coefficienti a_i non nulli. Si veda in figura 5.14 un esempio con $n = 7$.

Le proprietà del primo e second'ordine di un PRBS che varia tra $\pm \bar{n}$ sono

$$\left| \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M u(t) \right| = \frac{\bar{n}}{M} \quad (5.11)$$

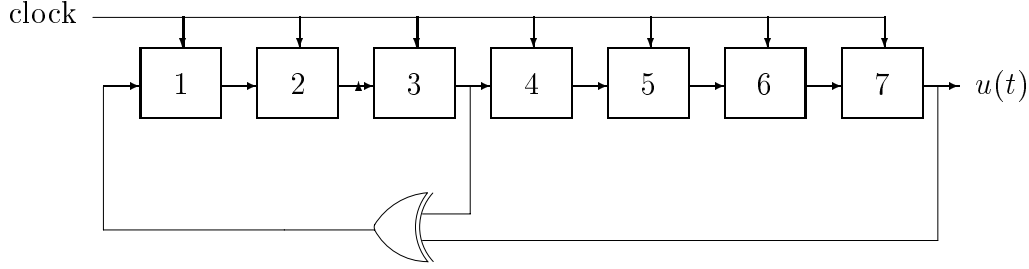


Figura 5.14: Esempio di generatore di sequenze binarie pseudo-random di ordine 7. I coefficienti a_i non nulli corrispondono ad $i = 3$ ed $i = 7$.

$$R_u(k) = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M u(t)u(t+k) = \begin{cases} \bar{u}^2 & k = 0, \pm M, \pm 2M \dots \\ \frac{\bar{u}^2}{M} & \text{altrove} \end{cases} \quad (5.12)$$

Si noti che il PRBS non ha esattamente media nulla. Lo spettro si può calcolare in maniera semplice dalla (5.12): esso è costituito da M righe spettrali equidistanti, di ampiezza proporzionale a $\bar{u}^2/M$. Si veda [Lju99, 13.3].

Queste proprietà valgono solo per i segnali costituiti da un numero intero di periodi. Ciò pone dei vincoli alla durata dell'esperimento, ma costituisce il principale vantaggio nell'utilizzo di segnali periodici rispetto ai processi aleatori: le loro proprietà del second'ordine sono semplici ed esattamente determinabili anche per un numero finito di campioni, mentre per i processi aleatori si deve ricorrere alle proprietà asintotiche.

Per un approfondimento sul tema della generazione di sequenze binarie si veda [Dav70].

Altri ingressi periodici Un'altra possibilità di scelta del segnale di ingresso è data da una somma di sinusoidi

$$u(t) = \sum_{k=1}^d a_k \cos(\omega_k + \phi_k), \quad (5.13)$$

che, come noto, ha spettro

$$\Phi_u(\omega) = 2\pi \sum_{k=1}^d \frac{a_k^2}{4} [\delta(\omega - \omega_k) + \delta(\omega + \omega_k)]. \quad (5.14)$$

Per ridurre il *crest factor*, di solito si scelgono le fasi in modo da rendere le sinusoidi il più possibile “fuori fase” tra loro (fasi di Schroeder)

$$\begin{aligned} \phi_1 & \text{ arbitraria} \\ \phi_k &= \phi_1 - \frac{k(k-1)}{d}; \quad 2 \leq k \leq d. \end{aligned} \quad (5.15)$$

In alternativa si può utilizzare un segnale di tipo *chirp*, che consiste in una sinusoide con frequenza che varia in una data banda $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ in un dato intervallo di tempo $0 \leq t \leq M$

$$u(t) = A \cos \left(\omega_1 t + (\omega_2 - \omega_1) t^2 / (2M) \right) \quad (5.16)$$

Questo tipo di segnale ha $C_r = \sqrt{2}$ e permette di sagomare abbastanza bene lo spettro. La frequenza variabile, però, fa sì che vi siano contributi anche a frequenze esterne al range di variabilità.

I risultati ottenuti non hanno evidenziato sostanziali differenze nei modelli stimati impiegando ingressi diversi, purché avessero un contenuto spettrale ben distribuito su tutta la banda delle frequenze. Si è riscontrato che dove il contenuto spettrale è più povero, aumenta la varianza delle stime, in perfetto accordo con la (3.31). Per ottenere buone stime, dunque, è opportuno utilizzare ingressi a banda sufficientemente larga. Si veda l'esempio riportato in figura (5.16).

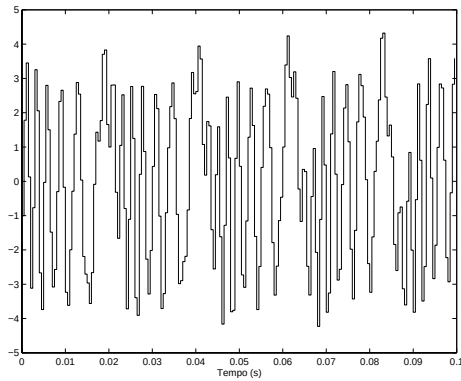
5.3 Preparazione dei dati

Una volta acquisiti i dati dall'esperimento di identificazione, è necessario prepararli per l'utilizzo nell'algoritmo di stima. In questa fase è possibile eliminare le porzioni di dati non rappresentative ed applicare dei filtri per rimuovere eventuali disturbi che non si vogliono modellare.

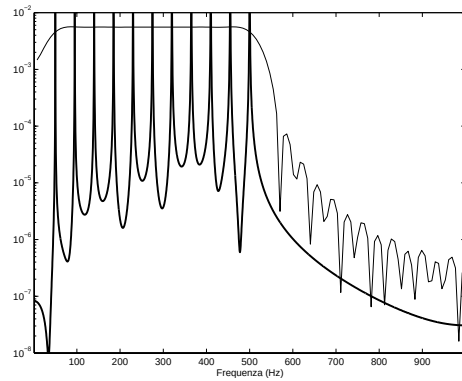
5.3.1 Rimozione dei dati non significativi

Durante le normali operazioni di registrazione è prassi lasciare delle porzioni vuote all'inizio e alla fine delle acquisizioni per rilevare eventuali fenomeni transitori. In generale ogni registrazione contiene una certa quantità di dati non significativi o disturbati che non si ha interesse a trattare.

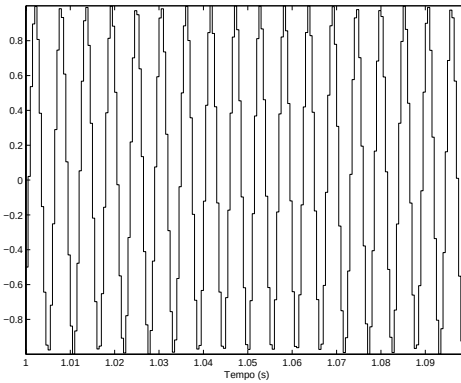
Uno degli aspetti più semplici, ma non per questo meno importanti, del trattamento preliminare dei dati è la rimozione delle porzioni non rappresentative



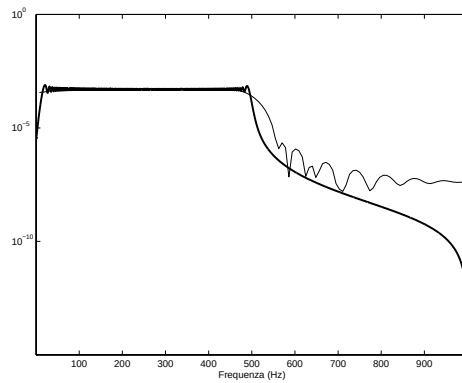
(a) Somma di sinusoidi.



(b) Spettro del segnale in (a).



(c) Segnale chirp.



(d) Spettro del segnale in (c).

Figura 5.15: Ingressi periodici: somma di sinusoidi e segnale chirp.

da una registrazione. I criteri di scelta sono molto soggettivi, per questo nei software che permettono di gestire la procedura di identificazione sono spesso previsti dei tool che consentono di effettuare la selezione in modo visuale.

Questo tema è trattato in modo approfondito in [Lju99], 14.3, dove viene anche studiata la possibilità di utilizzare più insiemi disgiunti di dati.

5.3.2 Prefiltraggio

L'applicazione di un filtro ai dati di ingresso e uscita, consente di eliminare eventuali disturbi che non si vogliono includere nel modello, inoltre, può avere un effetto positivo sul *bias*.

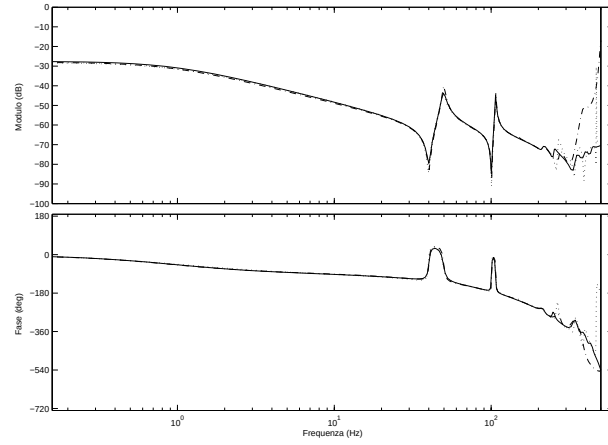


Figura 5.16: Stime ottenute impiegando ingressi diversi. Si noti la sostanziale concordanza delle stime. Le differenze maggiori si sono ottenute con le sinusoidi (linea-punto) e il segnale *chirp*. Il motivo è da ricercarsi nel fatto che entrambi avevano banda limitata a 300 Hz.

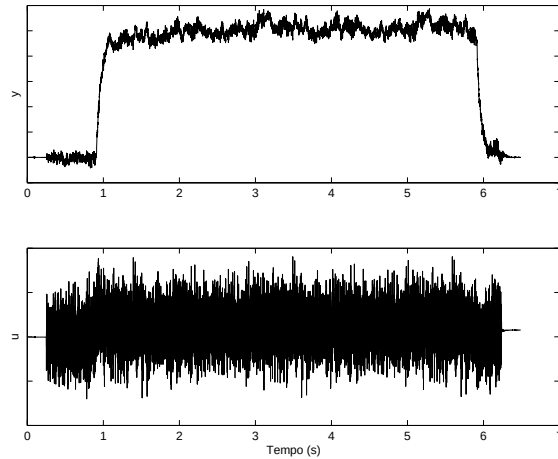


Figura 5.17: Esempio di registrazione di un esperimento. Prima di sottoporre i dati all'algoritmo di stima è opportuno rimuovere i transitori all'inizio e alla fine.

Filtrando i dati, non cambia la funzione di trasferimento del sistema, ma si adotta un modello del rumore diverso

$$y(t) = G_0(q)u(t) + H_0(q)e(t) \Rightarrow L(q)y(t) = G_0(q)L(q)u(t) + L(q)H_0(q)e(t).$$

Dal punto di vista della stima, filtrare i dati di ingresso e uscita è come filtrare l'errore di predizione

$$\begin{aligned} \varepsilon_F(t, \theta) &= L(q)\varepsilon(t, \theta) = \frac{L(q)}{H(q, \theta)}(y(t) - G(q, \theta)u(t)) \\ &= \frac{1}{H(q, \theta)}[L(q)y(t) - G(q, \theta)L(q)u(t)]. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Dunque, l'applicazione di un filtro lineare $L(q)$ ai dati si può interpretare in due modi:

- applicare un filtro all'errore di predizione, come nella (3.13);
- adottare un nuovo il modello del rumore $H_1(q) = H_0(q)/L(q)$.

La possibilità di modificare il modello del rumore, per quanto visto in 4.2.2, può essere usata per contrastare il *bias*. La funzione che pesa le varie frequenze nella (4.7) diventa

$$Q(\omega, \theta) = \frac{|L(e^{j\omega})|^2 \Phi_u(\omega)}{|H(e^{j\omega}, \theta)|^2}, \quad (5.18)$$

perciò i pesi possono essere redistribuiti scegliendo opportunamente il pre-filtro. Scegliendo $L(q) \equiv H(q, \theta)$, la funzione $Q(\omega)$ diventa pari allo spettro dell'ingresso. In questo modo vengono descritte meglio le componenti dell'ingresso a potenza maggiore. Questo metodo è stato proposto in 5.2.1 per contrastare l'effetto di miglior approssimazione in alta frequenza. Dal punto di vista computazionale questa scelta comporta dei vantaggi, perché consente di stimare il modello del sistema e del rumore mediante due minimizzazioni separate.

Filtrando i dati è possibile rimuovere eventuali disturbi che non si vogliono includere nel modello. Ad esempio, abbiamo già visto in 5.2.3 che, utilizzando un filtro elimina banda, è possibile rimuovere l'effetto del *cogging*. Si noti che il nuovo modello del rumore diventa $H_0(q)/L(q)$, che ha un guadagno molto alto in corrispondenza della banda eliminata. In pratica si impone che le componenti alla frequenza del *cogging* vengano attribuite al rumore.

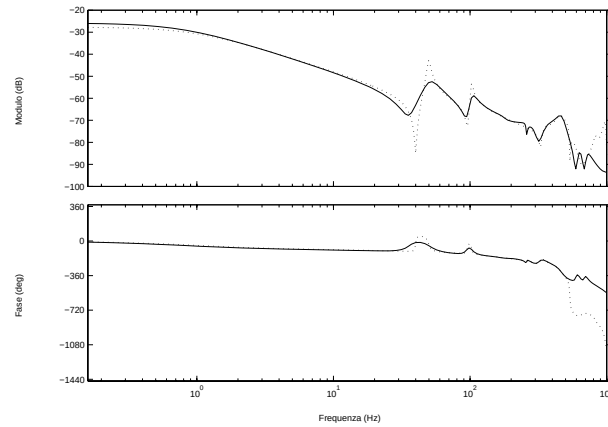


Figura 5.18: Rimozione dei disturbi in alta frequenza mediante prefiltraggio con un filtro passa basso standard (Butterworth ordine 8, freq. di taglio 250 Hz). Il modello stimato a partire dai dati originali è rappresentato in tratteggio. Entrambe le stime sono basate su un modello ARMAX di ordine 20.

Analogamente, per rimuovere i disturbi in alta frequenza, si può pensare di applicare ai dati un filtro passa basso. Come si può vedere in figura 5.18, non si ottengono stime buone come nel caso precedente. La presenza di disturbi a frequenze superiori a quelle di interesse per le dinamiche del sistema, deve far pensare di aver scelto un tempo di campionamento eccessivamente breve e quindi all'opportunità di ricampionare i dati. Ad esempio si confronti la figura 5.18 con la 5.3, ottenuta cambiando il tempo di campionamento.

5.3.3 Decimazione

Per quanto visto in 5.2.1, se le stime risultano troppo poco accurate in bassa frequenza, può essere necessario aumentare il tempo di campionamento. La scheda di controllo assi *MachM+* permette di modificare il tempo di campionamento in modo abbastanza semplice, ma, trovandosi spesso a comandare più di un asse, questa operazione non è molto sicura.

In realtà non è necessario ripetere l'esperimento: il tempo di campionamento si può aumentare decimando i dati. In questo senso cambiare il tempo di campionamento può essere incluso nella preparazione dei dati.

Si ricordi che, prima di compiere la decimazione, si devono filtrare i dati con un opportuno filtro passa basso, per evitare l'*aliasing*.

5.4 Scelta della struttura dei modelli

La scelta della struttura dei modelli da usare per l'identificazione consiste nel fissare:

- il tipo di struttura (ARX, ARMAX, OE, ecc.);
- l'ordine del modello della struttura prescelta.

La scelta della struttura è abbastanza soggettiva e in generale non dipende dai dati acquisiti. Tipicamente è il risultato di un compromesso tra la flessibilità, il numero di parametri del modello e la complessità del calcolo delle stime. Le principali strutture dei modelli usate nell'identificazione sono state presentate in 3.3:

- la struttura ARX permette di ottenere stime in modo efficiente, ma i problemi di approssimazione impongono di utilizzare modelli di ordine elevato;
- la struttura ARMAX permette di ottenere stime con un'approssimazione migliore a parità di ordine, ma con una complessità di calcolo decisamente maggiore;
- la struttura OE mal si presta all'identificazione in catena chiusa, avendo un modello del rumore fisso;
- la struttura BJ, infine, sembrerebbe la migliore dal punto di vista dell'approssimazione, avendo i modelli del sistema e del rumore parametrizzati indipendentemente, ma può essere ricondotta ad una struttura ARMAX scegliendo opportunamente i polinomi.

Nell'identificazione di assi meccanici, la scelta va fatta tra la struttura ARX e la struttura ARMAX, in base ai requisiti di velocità di calcolo o approssimazione. Il fatto che impiegando modelli ARX o ARMAX si abbia un modello del rumore con gli stessi poli del sistema, negli assi meccanici trova giustificazione dal punto di vista fisico. La maggior parte dei disturbi, infatti, sono disturbi di coppia, che agiscono all'ingresso dell'asse e quindi vengono filtrati dal sistema.

In figura 5.19 vengono confrontate le stime basate sulle varie strutture, a parità di ordine.

Una volta scelta la struttura, non rimane che scegliere l'ordine dei modelli. La conoscenza del sistema fisico può suggerire quale debba essere il *range* di

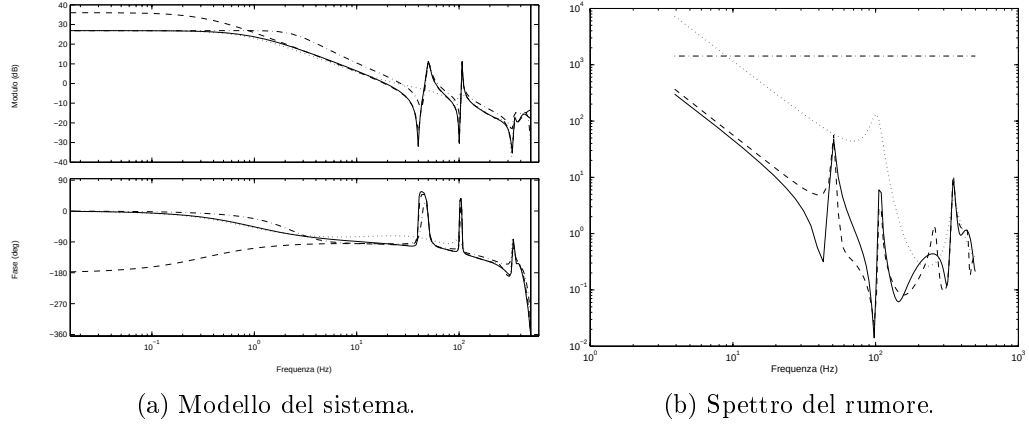


Figura 5.19: Confronto tra le stime ottenute mediante strutture dei modelli diverse, a parità di ordine dei polinomi. Linea continua: ARMAX; tratteggio corto: ARX; tratteggio lungo: BJ; linea-punto: OE. Tutti i modelli hanno polinomi di ordine 12.

ordini da considerare, ma si può valutare la qualità di un modello sulla base della sua capacità di riprodurre un certo *set* di dati. Utilizzando il predittore di un passo

$$\hat{y}_p(t) = \hat{H}^{-1}(q)\hat{G}(q)u(t) + (1 - \hat{H}^{-1}(q))y(t) \quad (5.19)$$

oppure il valore ottenuto dalla simulazione

$$\hat{y}_s(t) = \hat{G}(q)u(t), \quad (5.20)$$

si può misurare la qualità del modello $m = \mathcal{M}(\hat{\theta}_N)$ mediante la

$$J(m) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N |y(t) - \hat{y}_{s,p}(t|m)|^2. \quad (5.21)$$

Se il *set* di dati è lo stesso utilizzato per le stime e si utilizza il predittore di un passo, la (5.21) equivale alla funzione limite (3.16), ma può essere usato anche un nuovo *set* di dati. Naturalmente, J non può essere usata come criterio assoluto per stimare l'ordine dei modelli, perchè decresce monotonicamente all'aumentare del numero dei parametri. Ciò è dovuto al fatto che il modello si adatta sempre meglio ai dati. Il problema è che, oltre un certo ordine, i parametri vengono determinati sulla base dell'andamento effettivo dei segnali di ingresso e uscita, anzichè sui loro spettri, e quindi non è detto

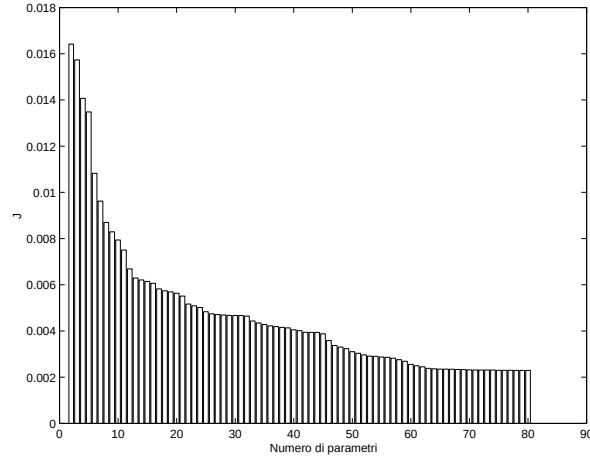


Figura 5.20: Andamento di J in funzione del numero di parametri di un modello ARX. Per ciascun numero di parametri è rappresentato il minimo valore di J .

che descrivano altrettanto bene altri dati provenienti dallo stesso processo. Si osservi l'andamento di J in figura 5.20: fintanto che il modello rileva le caratteristiche più importanti dei dati, J decresce rapidamente. Da un certo punto in poi cala meno rapidamente, perchè il modello inizia ad adattare i parametri in più alla particolare realizzazione dei processi di ingresso e uscita. Va scelto l'ordine per cui il miglioramento di J inizia ad essere poco significativo.

Esistono criteri di selezione che, oltre alla capacità di riprodurre i dati, pesano anche l'incremento della varianza dovuto all'introduzione di nuovi parametri. I più importanti sono l'AIC (*Akaike's Information theoretical Criterion*) e il MDL (*Minimum Description Length criterion*), rispettivamente espressi da

$$J_{AIC} = J \left(1 + \frac{2 \dim \theta}{N} \right) \quad (5.22)$$

$$J_{MDL} = J \left(1 + \dim \theta \frac{\log N}{N} \right). \quad (5.23)$$

Per approfondimenti si veda [Lju99, 7.4 e 16.4].

Nelle prove effettuate, gli strumenti per la stima dell'ordine non hanno dato buoni risultati. Come si può vedere dalla figura 5.20, l'andamento di J è piuttosto irregolare e si assesta solo per valori molto elevati del numero di

parametri, a dimostrazione del fatto che il modello “vero” dell’asse è molto complesso e probabilmente nemmeno lineare. Ma tenendo conto che lo scopo principale delle stime è di caratterizzare bene il comportamento risonante dell’asse, si è visto che l’utilizzo di polinomi di ordine 15-20 nei modelli ARMAX e di ordine 20-30 nei modelli ARX, nella maggior parte dei casi consente di ottenere delle buone stime.

5.5 Modifica delle stime ai fini del controllo

Le stime vengono utilizzate come base per la sintesi di un sistema di controllo dell’asse. L’uso di modelli di ordine elevato e la necessità di cambiare il tempo di campionamento fanno sì che le stime debbano essere adattate alle particolari esigenze di controllo, riducendo l’ordine e ricampionando i modelli.

5.5.1 Riduzione dell’ordine

Abbiamo visto che, per evitare problemi di *bias*, si debbono utilizzare strutture di modelli di ordine elevato, ma spesso l’ordine delle stime è troppo alto per utilizzarle come base per la sintesi di un regolatore, per cui è necessario cercare di ridurlo.

Si può utilizzare lo schema di riduzione dell’ordine basato sulla realizzazione in forma bilanciata, che consente di valutare l’influenza dei singoli stati sul comportamento ingresso/uscita del sistema ed eliminare quelli “meno osservabili” e “meno raggiungibili”.

Si veda un esempio di riduzione dell’ordine nelle figure 5.21 e 5.22.

5.5.2 Ricampionamento

Se le stime devono essere usate per progettare un regolatore che funziona con un tempo di campionamento diverso, è necessario ricampionare il modello. Il ricampionamento consiste in una interpolazione, che porta il sistema nel continuo, seguita da un nuovo campionamento.

Il modo più semplice per passare dal tempo discreto al tempo continuo è uti-

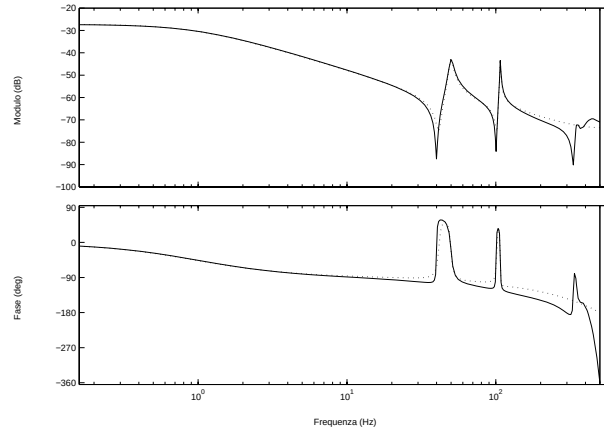


Figura 5.21: Riduzione dell'ordine mediante la rappresentazione in forma di stato bilanciata. Il modello di partenza (linea continua) è di ordine 12, mentre il modello di ordine ridotto (tratteggio) è di ordine 5.

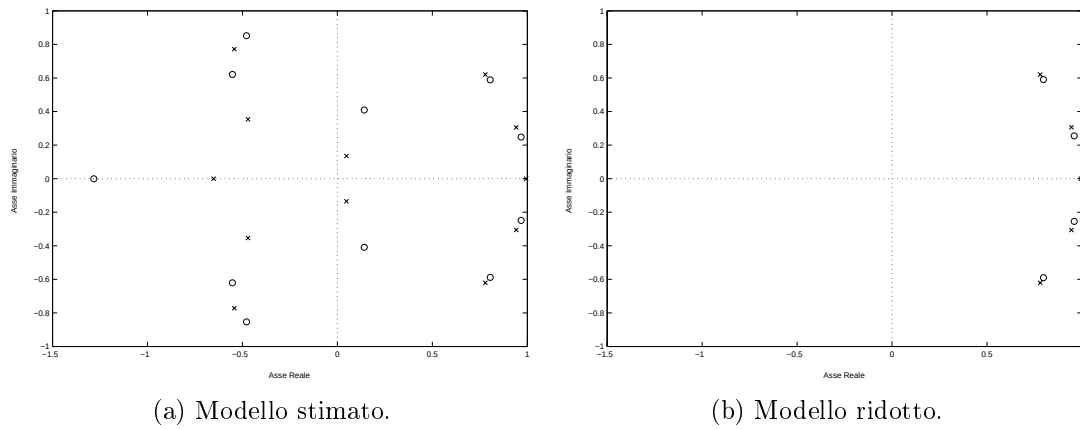


Figura 5.22: Riduzione dell'ordine mediante la rappresentazione in forma di stato bilanciata. Poli e zeri dei sistemi di figura 5.21

lizzare uno *zero-holder*, che realizza la trasformazione detta “dell’invarianza della risposta al gradino”

$$H(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z} \left\{ \frac{H(s)}{s} \right\}. \quad (5.24)$$

Questa trasformazione, così come tutte quelle che implicano l’invarianza della risposta ad un dato ingresso canonico, fallisce se il modello ha poli in $z = 0$ e poli reali negativi. Il motivo è che i poli vengono mappati secondo la relazione

$$z = e^{sT}, \quad (5.25)$$

e il logaritmo di un numero negativo è una famiglia di numeri complessi

$$\log(-a) = \log(a) + j(\pi \pm 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.26)$$

Anche prendendo solo il valore corrispondente a $k = 0$, si otterrebbe un polo complesso senza il complesso coniugato, che porterebbe ad una funzione di trasferimento a coefficienti complessi. Il problema si può parzialmente risolvere aumentando l’ordine del modello, come descritto in [KFP96].

Anche il metodo detto *matched*, che trasforma il modello in uno avente lo stesso guadagno statico e mappa poli e zeri secondo la (5.25), soffre dello stesso problema.

Una possibile alternativa è data dai metodi di integrazione numerica. Ad esempio, il metodo di integrazione trapezoidale mappa i poli e gli zeri del modello utilizzando la trasformazione bilineare di Tustin

$$z = \frac{1 + sT/2}{1 - sT/2} \approx e^{sT}. \quad (5.27)$$

La trasformazione di Tustin non è definita per $z = -1$ ed è mal condizionata per i poli attorno a $z = -1$.

Come è noto, i metodi di integrazione numerica introducono una distorsione nella risposta in frequenza, che può portare a dei problemi di controllo se interessa le frequenze attorno alla frequenza di attraversamento.

Per ulteriori approfondimenti, si vedano [FPW90a] e [Cis99].

Riassumendo: se i modelli vengono utilizzati per progettare regolatori a tempi di campionamento diversi, devono essere ricampionati. Vi sono diverse possibilità di ricampionare un modello: utilizzando i metodi di invarianza della risposta sorgono dei problemi in presenza di zeri e poli reali negativi; i metodi di integrazione numerica, invece, introducono una distorsione della risposta in frequenza.

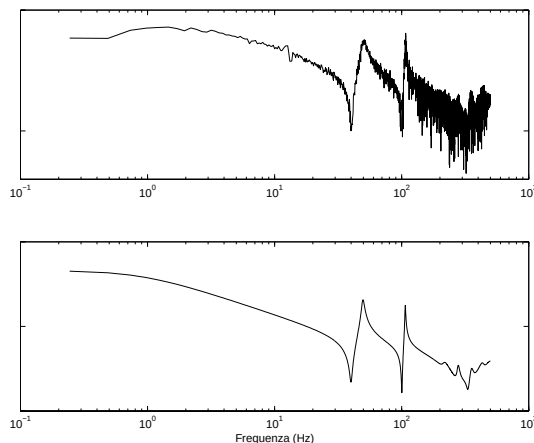


Figura 5.23: In alto: periodogramma dei dati di uscita. L'ingresso è un unico periodo di un PRBS di ordine 12. In basso: stima basata su un modello ARMAX di ordine 20 e sugli stessi dati.

5.6 Validazione delle stime

Una volta scelto il modello che meglio descrive i dati, è necessario stabilire se è adatto per i nostri scopi o se si deve ripetere l'identificazione rivedendo qualche scelta. Questo è il problema della validazione delle stime.

La validazione delle stime può essere fatta a più livelli: la primo e più importante modo di stabilire se un modello può essere ritenuto “valido” è confrontarne le caratteristiche con la conoscenza a priori del sistema. Nel nostro caso, ad esempio, un modello “valido” deve descrivere bene le risonanze dell'asse.

Se si è utilizzato in ingresso rumore bianco o binario oppure un PRBS, si può confrontare la funzione di trasferimento del modello stimato con il periodogramma dei dati di uscita. Con ingresso di tipo PRBS si ottiene un periodogramma particolarmente scorrevole: si veda l'esempio di figura 5.23.

La validazione può esser fatta anche sulla base dei dati, con una tecnica detta *analisi dei residui*.

I *residui* sono le parti dei dati che il modello non riesce a riprodurre

$$\varepsilon(t, \hat{\theta}_N) = y(t) - \hat{g}(t|\hat{\theta}_N). \quad (5.28)$$

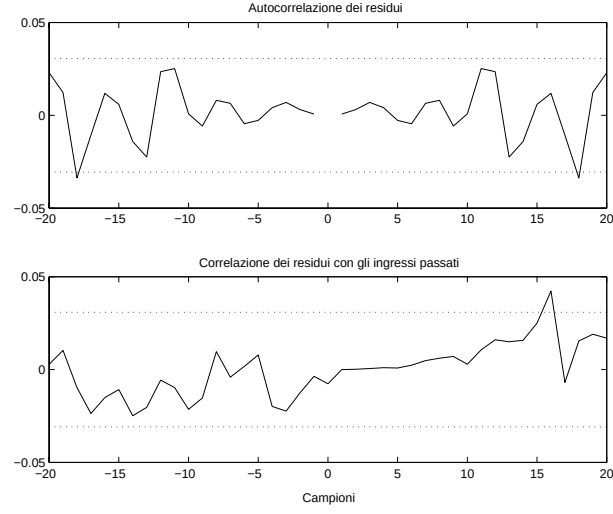


Figura 5.24: Analisi dei residui per il modello e i dati di figura 5.23. Le linee tratteggiate indicano le regioni di confidenza.

Si studiano la covarianza tra i residui e gli ingressi passati

$$\hat{R}_{\varepsilon u}^N(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon(t) u(t - \tau) \quad (5.29)$$

e l'autocorrelazione dei residui

$$\hat{R}_{\varepsilon}^N(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon(t) \varepsilon(t - \tau). \quad (5.30)$$

Se la covarianza assume valori piccoli, significa che non vi sono parti di $y(t)$ che originano dagli ingressi passati che il modello non riesce a riprodurre. Se l'autocorrelazione dei residui non è piccola (per $\tau \neq 0$) significa che una parte di $\varepsilon(t)$ avrebbe potuto essere prevista dai dati.

In figura 5.24 è rappresentata l'analisi dei residui per il modello e i dati di figura 5.23. Le linee tratteggiate indicano le regioni di confidenza. Si veda [Lju99, 16.6] per ulteriori dettagli.

5.7 Stima della funzione di trasferimento dell'anello di velocità chiuso

Una volta che si è stimato un modello del sistema di figura 5.2, la stima viene usata per tarare il regolatore di velocità R_v .

A questo punto, si può ripetere la procedura di identificazione per ricavare un modello del sistema a catena chiusa. Questa seconda stima ha due obiettivi:

- fornire una base per il progetto del regolatore di posizione R_p ;
- valutare se i margini del regolatore di velocità sono sufficienti.

Il sistema che si vuole identificare è rappresentato in figura 5.25. Naturalmente, per il primo obiettivo è necessario porre in uscita al sistema un integratore, per ottenere la posizione corrente dell'asse.

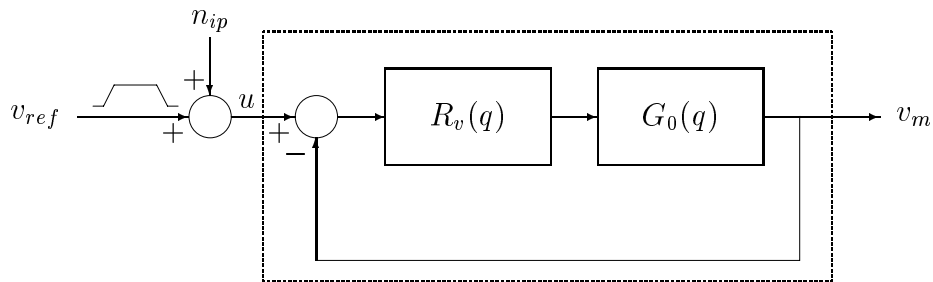


Figura 5.25: Schema a blocchi del sistema da identificare.

La procedura di identificazione ricalca gli stessi passi della precedente, ma in questo caso il moto dell'asse è abbastanza ben governato dal regolatore di velocità, quindi si può condurre l'esperimento a catena aperta.

Anche in questo caso l'asse deve essere mantenuto in movimento a causa della non linearità introdotta dall'attrito di primo distacco, per cui il segnale di ingresso è dato dalla sovrapposizione del segnale di eccitazione n_{ip} con il riferimento.

In figura 5.26 è riportato un esempio di stima della funzione di trasferimento dell'anello di velocità chiuso.

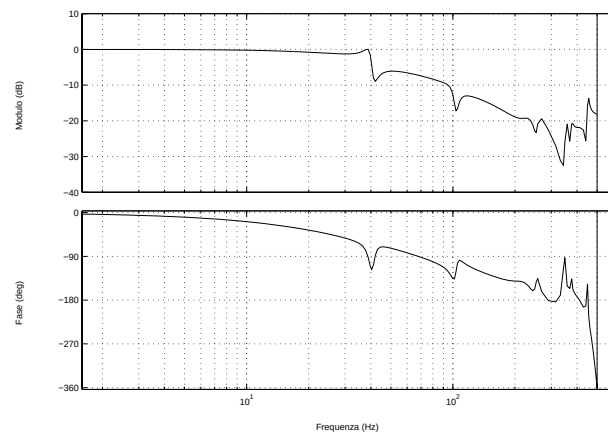


Figura 5.26: Stima della funzione di trasferimento dell'anello di velocità chiuso, dal riferimento di velocità alla velocità dell'asse. Si basa su un modello ARMAX di ordine 20.

Capitolo 6

Controllo basato sull'identificazione

Lo scopo dei modelli ottenuti con l'identificazione è fornire una base per sintetizzare un controllo dell'asse. In questo capitolo viene presentato un esempio di sintesi di un regolatore basato sui modelli stimati.

6.1 Introduzione

Il sistema di controllo assi implementato sulla scheda Salvagnini *MachM+* ha la struttura rappresentata in figura 6.1

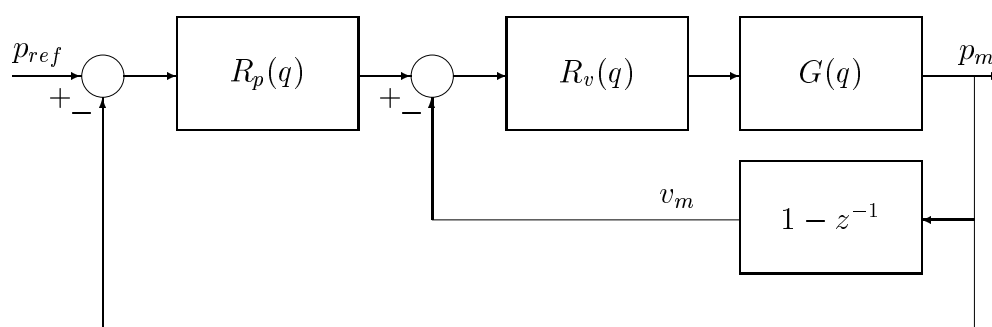


Figura 6.1: Sistema di controllo dell'asse.

Vi sono due anelli di regolazione: uno di velocità ed uno di posizione. L'algoritmo di controllo è gestito interamente dalla scheda *MachM+*, quindi si

dispone della massima libertà di scelta della struttura dei regolatori. Sono state provate diverse strutture, con risultati alterni.

Nelle sezioni seguenti viene proposta la sintesi di un regolatore di velocità per il banco prova. Il regolatore prescelto ha una struttura fortemente dipendente dal modello stimato, in questo modo la sintesi serve anche da validazione delle stime.

6.2 Struttura del regolatore di velocità

Il regolatore di velocità è costituito da un PI con feed-forward pseudo-derivativo (PDFF), seguito da due *lag* (reti attenuatrici/ritardatrici) o da due filtri biquadratici, o da una combinazione di essi.

La struttura del regolatore PI con PDFF è riportata in figura 6.2.

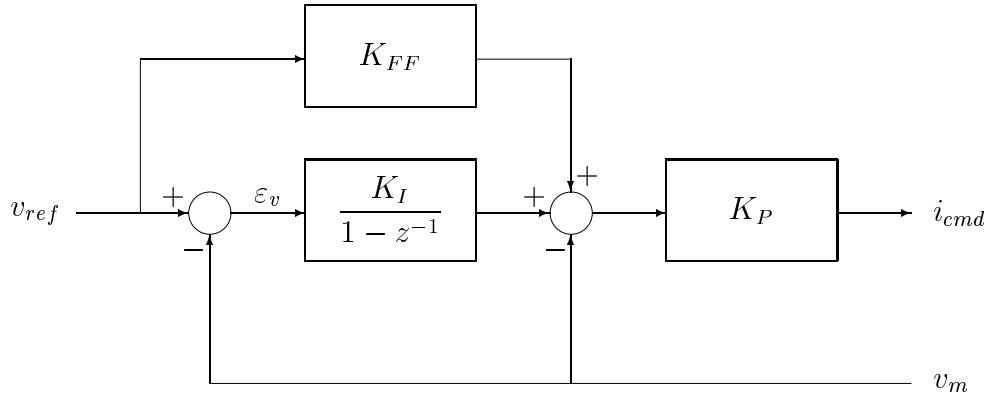


Figura 6.2: Regolatore PI con PDFF.

Se $K_{FF} = 1$, il comando di corrente uscente dal regolatore è

$$\begin{aligned}
 i_{cmd} &= K_P(v_{ref} - v_m) + K_P \frac{K_I}{1 - z^{-1}} \varepsilon_v = \\
 &= K_P \left(1 + \frac{K_I}{1 - z^{-1}} \right) \varepsilon_v.
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Un filtro biquadratico consiste in una coppia di zeri e di poli complessi co-

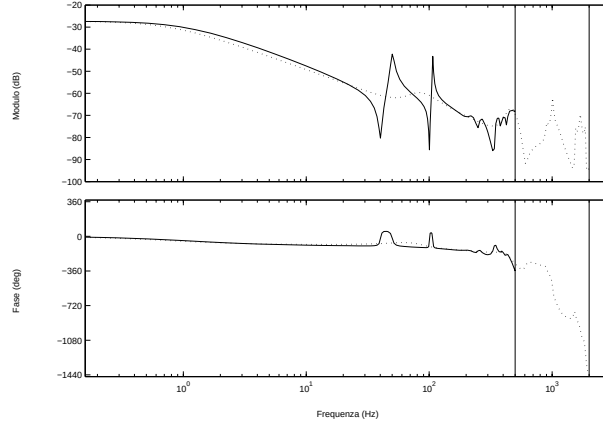


Figura 6.3: Stime del banco prova per il progetto del regolatore di velocità. Sono state ottenute con tempi di campionamento rispettivamente di 1 ms e 250 μ s.

niugati ed ha lo scopo di compensare i comportamenti risonanti dell'asse. La sua funzione di trasferimento è

$$B(z) = k \frac{z^2 - 2r_z \cos \theta_z z + r_z^2}{z^2 - 2r_p \cos \theta_p z + r_p^2} \quad (6.2)$$

con $r_{z,p} = e^{-\omega_{z,p} \xi_{z,p} T_c}$, $\theta_{z,p} = \omega_{z,p} T_c \sqrt{1 - \xi_{z,p}^2}$. Il guadagno k viene scelto in modo che $B(1) = 1$.

Il *lag*, come noto, è costituito da una coppia polo/zero ed ha l'effetto di attenuare la risposta in frequenza e di introdurre un ritardo di fase. Può essere usato per attenuare i picchi delle risonanze.

6.3 Sintesi del regolatore di velocità

Nel progetto di un controllo di velocità per il banco prova, si vuole che il sistema a catena chiusa abbia una buona banda passante, ma che la sovraelongazione sia contenuta per ridurre l'errore di inseguimento nel controllo di posizione.

Il tempo di campionamento è $T_c = 250 \mu$ s. Purtroppo le stime effettuate con un tempo di campionamento così basso sono scarsamente significative in bassa frequenza, dove invece l'asse presenta un comportamento risonante. È necessario quindi ricorrere ad una stima con un tempo di campionamento

maggiore. In figura 6.3 sono riportate le stime del banco prova effettuate a tempi di campionamento diversi. Come si può vedere, la risposta dell'asse è molto complessa.

Si vuole progettare un regolatore che compensi le due risonanze e le due antirisonanze in bassa frequenza mediante due filtri biquadratici. Per tarare i filtri biquadratici si pongono le frequenze degli zeri e dei poli il più possibile vicino rispettivamente alle frequenze delle risonanze e delle antirisonanze. I valori degli smorzamenti possono essere aggiustati calcolando la f.d.t. di anello con Matlab.

Si vedano la risposta al gradino unitario ed il diagramma di Bode del sistema a catena chiusa rispettivamente in figura 6.6 e 6.5. Si noti che le figure sono state disegnate a partire dal modello con $T_c = 1$ ms, mentre il regolatore e il sistema hanno $T_c = 250$ μ s.

In figura 6.4 è riportato il diagramma di Bode del regolatore.

I valori ottenuti per i parametri del regolatore sono riportati in tabella 6.1.

Infine, nelle figure 6.7 e 6.8 sono riportate gli andamenti della velocità in uscita, dell'errore di velocità e del segnale di comando misurati sul banco.

PI con PDFF	$K_P = 5.76$ $K_I = 0.0012$ $K_{FF} = 1$
Filtro biq. 1	$f_z = 50$ Hz $\xi_z = 0.03$ $f_p = 39$ Hz $\xi_p = 0.05$
Filtro biq. 2	$f_z = 107.43$ Hz $\xi_z = 0.01$ $f_p = 100$ Hz $\xi_p = 0.03$

Tabella 6.1: Parametri del regolatore.

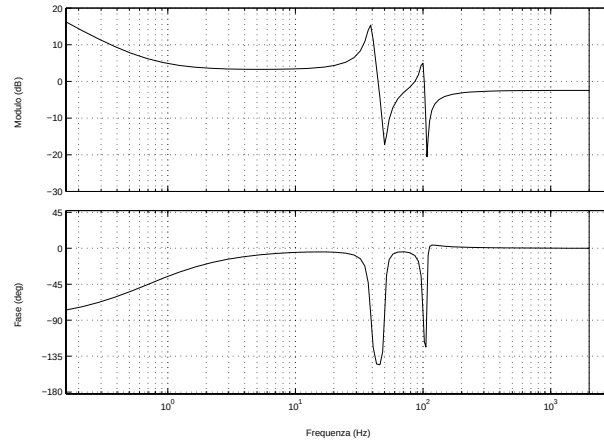


Figura 6.4: Diagramma di Bode del regolatore.

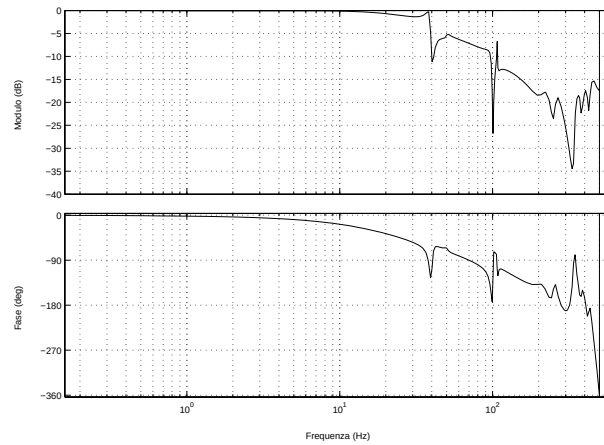


Figura 6.5: Diagramma di Bode della f.d.t. a catena chiusa.

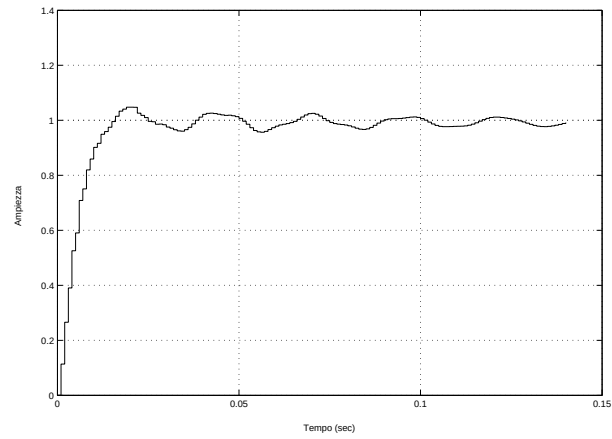


Figura 6.6: Risposta al gradino unitario del sistema a catena chiusa.

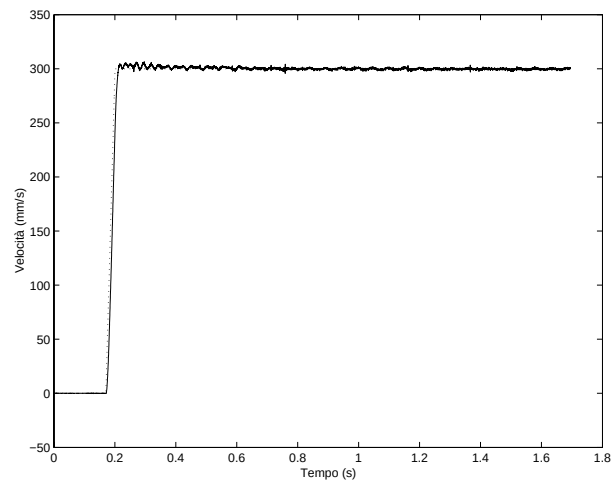


Figura 6.7: Andamento della velocità misurato sul banco prova. In tratteggio è riportato il segnale di riferimento.

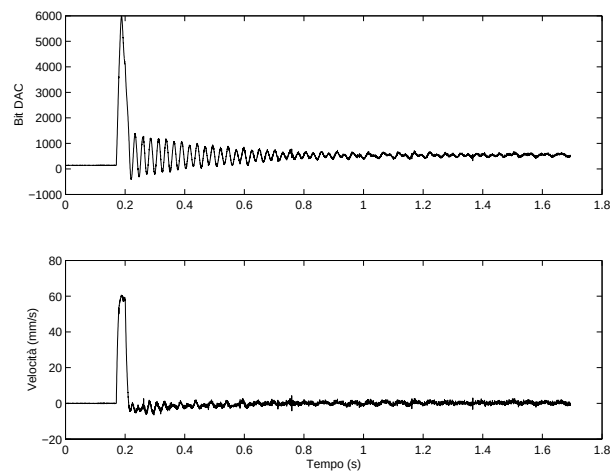


Figura 6.8: In alto: andamento del segnale di comando in seguito al gradino di figura 6.7. In basso: errore di velocità in seguito al gradino di figura 6.7.

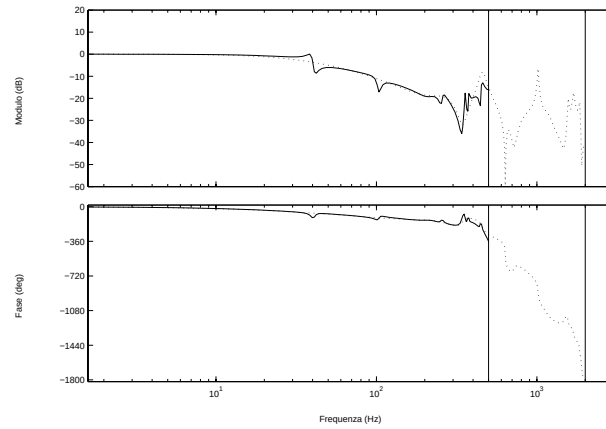


Figura 6.9: Stime dell'anello chiuso di velocità basate su modelli ARMAX di ordine 20, ottenute con tempi di campionamento di 1 ms (linea continua) e $250 \mu\text{s}$ (linea tratteggiata). Si confronti questa figura con la 6.3.

6.4 Verifica dei risultati con l'identificazione

Una volta chiuso l'anello di velocità, si può stimare la sua funzione di trasferimento per verificare la qualità del regolatore appena progettato.

Anche in questo caso utilizziamo due stime con diversi tempi di campionamento, per ottenere una buona descrizione a tutte le frequenze.

Si vedano in figura 6.9 i diagrammi di Bode dei modelli stimati. Il sistema a catena chiusa sostanzialmente si comporta come previsto, ma si notano maggiormente i comportamenti risonanti a frequenza più alta, che non vengono compensati. Si confronti la figura con la 6.3.

Capitolo 7

Esempio di identificazione di un asse meccanico

In questo capitolo viene presentata, a titolo di esempio, l'identificazione di un asse meccanico installato sulla macchina laser Salvagnini *L2*. La procedura seguita riprende quanto illustrato nei capitoli precedenti. Inoltre viene presentata l'interfaccia utente realizzata in ambiente Matlab per la gestione della procedura di identificazione.

7.1 Introduzione

Gli assi meccanici comandati da motori lineari vengono impiegati nel sistema di taglio laser Salvagnini *L2* per la loro alta dinamica e precisione nel posizionamento. Il controllo degli assi basato sull'identificazione permette di sfruttarne al meglio le caratteristiche.

Nel sistema *L2* sono installati due assi comandati da motori lineari. Ciascuno effettua il movimento della testa laser sul piano di taglio lungo un asse coordinato. La procedura di identificazione dei due assi va condotta in più punti, per rilevare eventuali variazioni nella risposta in frequenza e ciò comporta un carico di lavoro piuttosto consistente. Per cercare di automatizzare il più possibile la procedura, è stata realizzata una interfaccia utente in ambiente Matlab, che permette di gestire in modo interattivo le operazioni di importazione dei dati, di stima dei modelli e di sintesi dei regolatori.

Questo capitolo presenta un esempio di stima di un modello per l'asse y del sistema *L2* mediante il *System Identification Toolbox* di Matlab, facendo



Figura 7.1: Il sistema laser Salvagnini L2.

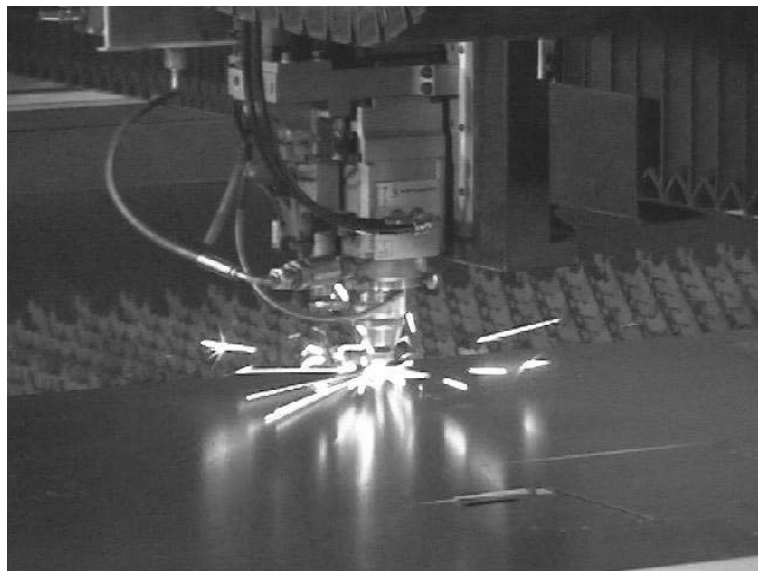


Figura 7.2: Particolare del taglio laser di una lamiera.

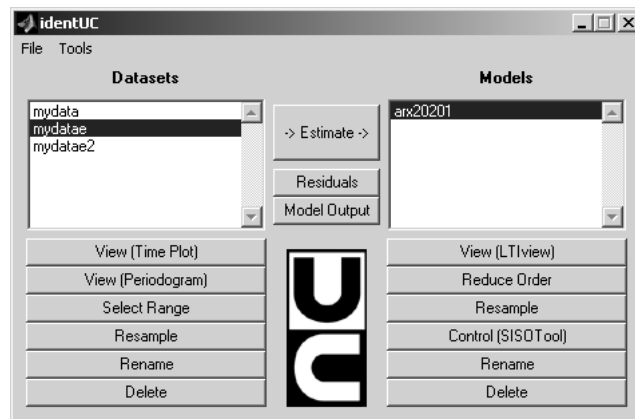


Figura 7.3: Finestra principale dell'interfaccia utente *identUC* per la gestione della procedura di identificazione. A sinistra vengono gestiti i *set* di dati, a destra i modelli.

riferimento, quando possibile, alle funzioni dell'interfaccia utente.

7.2 L'interfaccia utente *identUC*

È stata realizzata un'interfaccia utente denominata *identUC*, prendendo spunto da quella già presente nel *System Identification Toolbox* di Matlab, ed integrandola con una serie di funzioni specifiche per l'identificazione degli assi, riducendo sensibilmente la quantità di scelte a carico dell'utente.

Di seguito sono riportate le sue principali funzioni.

Input/Output Gran parte del lavoro fatto riguarda la gestione delle operazioni di importazione/esportazione di files nel formato utilizzato dalla scheda di controllo *MachM+*. L'interfaccia permette di importare *set* di dati direttamente dai files di misure e di generare files contenenti i segnali di eccitazione per l'esperimento.

I dati si possono importare ed esportare anche dal *workspace* di Matlab e da files .MAT.

Trattamento dei dati L'interfaccia permette di effettuare in modo interattivo la rimozione delle parti non significative e la decimazione dei dati.

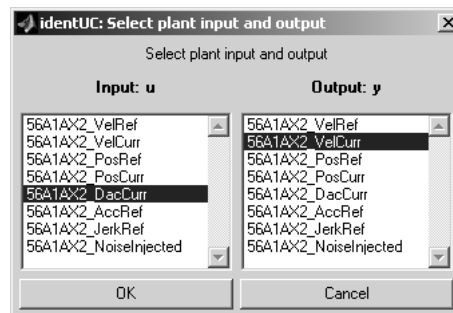


Figura 7.4: Importazione di un file di misure della scheda *MachM+*: selezione delle tracce contenenti i dati di ingresso e uscita.

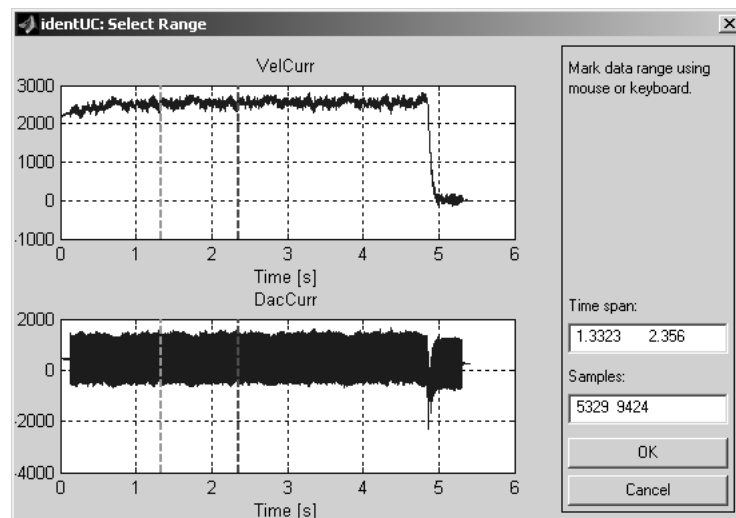


Figura 7.5: Selezione di un intervallo di dati.

La rimozione delle parti non significative avviene selezionando gli intervalli di dati direttamente dal grafico, tramite mouse.

Il comando per la decimazione dei dati si occupa anche di applicare un filtro anti-aliasing e di trasformare i dati qualora cambi l'unità di misura (ad esempio la velocità è espressa in impulsi per tempo di campionamento...).

Visualizzazione I dati e i modelli trattati possono essere visualizzati mediante delle routines che chiamano gli strumenti già presenti in Matlab (come *LTView*), operando le opportune conversioni di unità di misura per poter fare dei confronti.

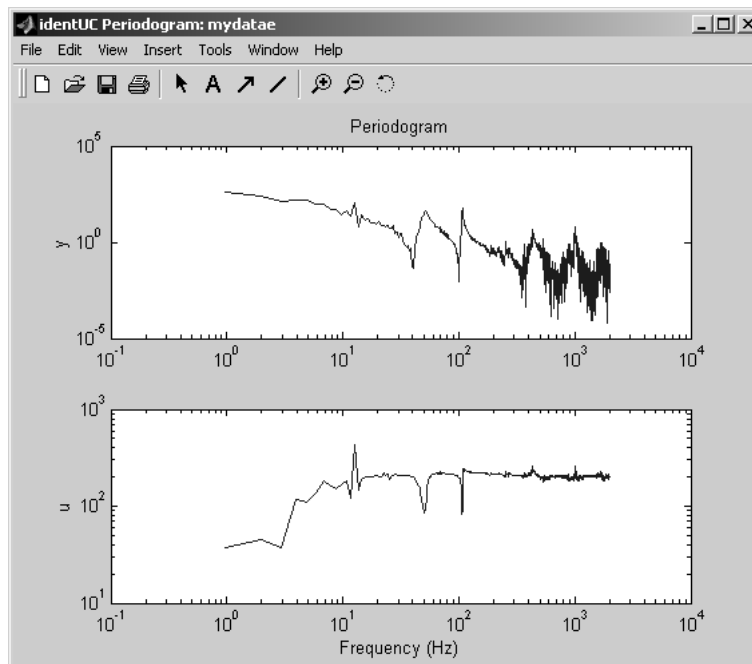


Figura 7.6: Visualizzazione del periodogramma.

E' inoltre possibile visualizzare il periodogramma dei dati per una valutazione preliminare della forma dello spettro.

Stima e Validazione I parametri da impostare per l'avvio dell'algoritmo di stima sono ridotti al minimo per velocizzare la procedura di identificazione. Le stime si possono basare su modelli ARX (stime veloci) o ARMAX (stime accurate), l'ordine si può impostare, ma è lo stesso per tutti i polinomi. Il numero di ritardi viene stimato in modo automatico calcolando la funzione limite di 10 modelli ARX dello stesso ordine, con ritardi crescenti da 1 a 10 passi. Si può scegliere se stimare nel modo classico ("Prediction") oppure se evitare di pesare le frequenze con l'inverso del modello del rumore, per ridurre il *bias* a bassa frequenza ("Simulation").

Due pulsanti attivano le corrispondenti funzioni del *System Identification Toolbox* per la validazione ed il confronto dei modelli: *resid*, per l'analisi dei residui e *compare*, per la simulazione dei modelli stimati.

Modifica delle stime ai fini del controllo *IdentUC* permette di accedere ad alcuni strumenti per adattare i modelli stimati alle esigenze di

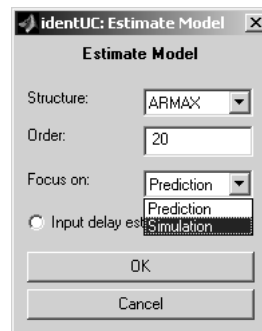


Figura 7.7: Il menu di stima.

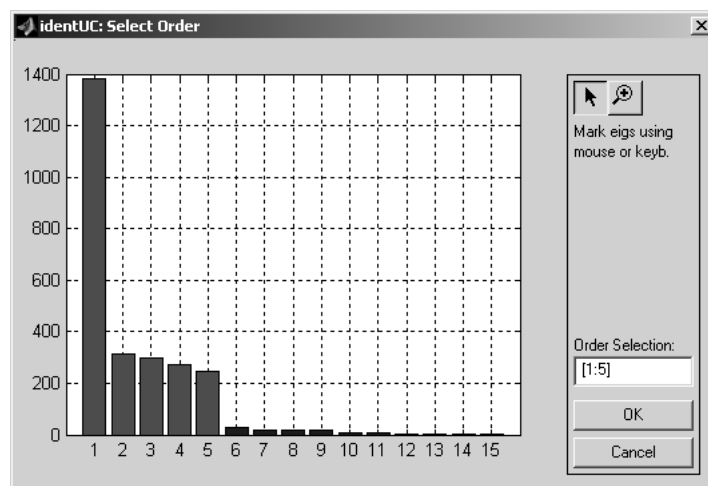


Figura 7.8: Gestione interattiva della riduzione dell'ordine mediante realizzazione bilanciata. Le barre verticali indicano i valori della diagonale del gramiano per i vari stati.

controllo.

È stata realizzata un'interfaccia grafica per gestire la riduzione dell'ordine mediante realizzazione bilanciata (*modred*), che consente di eliminare le componenti del vettore di stato con il mouse.

È possibile ricampionare il modello stimato per riportare il tempo di campionamento al valore del regolatore.

Una volta ottenuta una stima soddisfacente, mediante l'apposito pulsante si può lanciare *SISOTool*, per progettare un regolatore.

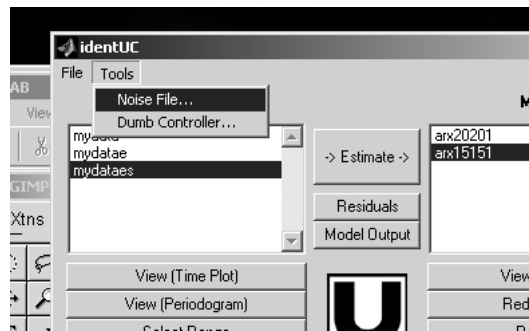


Figura 7.9: I menu per attivare le funzioni di generazione dei files di rumore e di sintesi del regolatore a bassa banda.

Altre funzioni specifiche Il menu “Tools” raccoglie delle routines che realizzano delle funzioni specifiche: la sintesi del regolatore a bassa banda (si veda la sezione seguente) può esser fatta in modo automatico selezionando la funzione “Dumb Controller”, mentre “Noise File” genera un file contenente il segnale di eccitazione per l’esperimento, specificandone il tipo (rumore bianco gaussiano, segnale random binario, PRBS) e il numero di campioni.

7.3 Preparazione dell'asse

Prima di iniziare l’esperimento di identificazione dell’asse y del sistema laser $L2$, è necessario sintetizzare un regolatore di velocità a bassa banda per permettere all’asse di seguire una traiettoria.

Per far ciò si sfrutta una funzione appositamente realizzata sulla scheda di controllo. Si invia un gradino al comando di corrente e si misura la risposta dell’asse a catena aperta, ottenendo l’andamento di figura 7.10. Questo tipo di misure è molto delicato, perché l’asse si muove senza controllo, quindi è opportuno effettuarle a partire da gradini di ampiezza minima. Il tempo di campionamento del sistema è

$$T_s = 500\mu s$$

Come si può ben vedere, l’asse risponde al gradino positivo in maniera nettamente diversa rispetto al gradino negativo, a conferma di quanto detto in 2.4.

Per ottenere un modello semplificato dell’asse applichiamo le funzioni di sti-

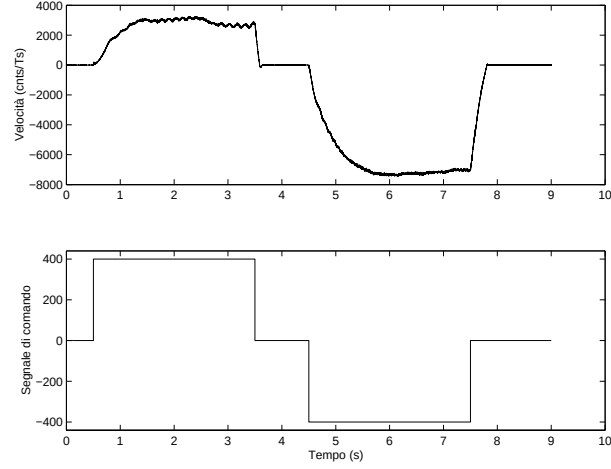


Figura 7.10: Andamento della risposta al gradino a catena aperta. Il comando di corrente è pari a $\bar{u} = 400$ bit del DAC dell'azionamento. La velocità dell'asse è espressa in impulsi per tempo di campionamento.

ma parametrica ai dati acquisiti, separatamente per il gradino positivo e quello negativo. La struttura prescelta è un modello ARX di ordine 1

$$y(t) + a_1 y(t-1) = b_0 u(t) + e(t). \quad (7.1)$$

Generalmente si ottengono due valori differenti di b_0 e a_1 , quindi si prende la media. Nel caso in esame si ottiene

$$\begin{aligned} b_0 &= 8.926 \cdot 10^{-3}, & b'_0 &= 2.432 \cdot 10^{-2} \Rightarrow k = \sqrt{b_0 \cdot b'_0} = 1.473 \cdot 10^{-2}; \\ a_1 &= -0.9988, & a'_1 &= -0.99866 \Rightarrow p = \frac{a_1 + a'_1}{2} = -0.99873; \\ \hat{G}(q) &= \frac{k}{1 + pz^{-1}} = \frac{0.01473}{1 - 0.99873z^{-1}}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Una volta stimato il modello semplificato dell'asse, si sintetizza il regolatore imponendo una banda passante di 2 Hz

$$\begin{aligned} R_v(e^{j4\pi T_s}) \cdot \hat{G}(e^{j4\pi T_s}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ K_p \frac{1 + K_i z^{-1}}{1 - z^{-1}} \cdot \frac{k}{1 + pz^{-1}} \Big|_{z=e^{j4\pi T_s}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Rightarrow K_i = p = -0.99873, & \quad K_p = \frac{1 - e^{-j4\pi T_s}}{k\sqrt{2}} = 0.301 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow R_v(z) = 0.301 \frac{1 - 0.99873z^{-1}}{1 - z^{-1}}. \quad (7.3)$$

Nell'interfaccia utente il procedimento di sintesi avviene in modo automatico. I conti appena visti vengono svolti da una procedura che ritorna direttamente i valori di K_p e K_i .

Impostando K_p e K_i sulla scheda *MachM+* si chiude l'anello di velocità.

7.4 Esperimento

Una volta chiuso l'anello di velocità il sistema è pronto per l'esperimento di identificazione.

Mediante l'apposito comando sull'interfaccia, generiamo un file contenente 4095 campioni di segnale random binario, da utilizzare come segnale di eccitazione per l'esperimento. Impostiamo sulla scheda che l'ampiezza del segnale vari tra ± 900 bit del DAC (che corrispondono a circa ± 1.1 V) e che venga ripetuto indefinitamente.

Per quanto riguarda il movimento dell'asse, la corsa utile è di circa 1 m. Per non risentire dell'effetto del *cogging*, assumiamo una velocità di riferimento di 200 mm/s. Il numero massimo di campioni che si possono acquisire in un movimento singolo è

$$\frac{1000 \text{ mm}}{200 \text{ mm/s} \cdot T_s} = 10000 \text{ campioni.}$$

A questo punto si danno i comandi di movimento, si inietta il segnale di eccitazione e si effettua la registrazione. Se possibile, è bene far muovere l'asse nei due sensi, per rilevare eventuali differenze nella risposta.

Per identificare l'asse in modo diretto, si devono acquisire gli andamenti del segnale di comando (ingresso) e della velocità dell'asse (uscita). I dati ottenuti sono rappresentati in figura 7.11.

Prima di procedere, si selezionano due intervalli di dati significativi: uno su cui basare la stima, l'altro per la validazione. Ad esempio, facendo riferimento alla figura 7.11, prendiamo un *set* di dati da 0.5 s a 2.3 s, e l'altro da 4 s a 5.7 s.

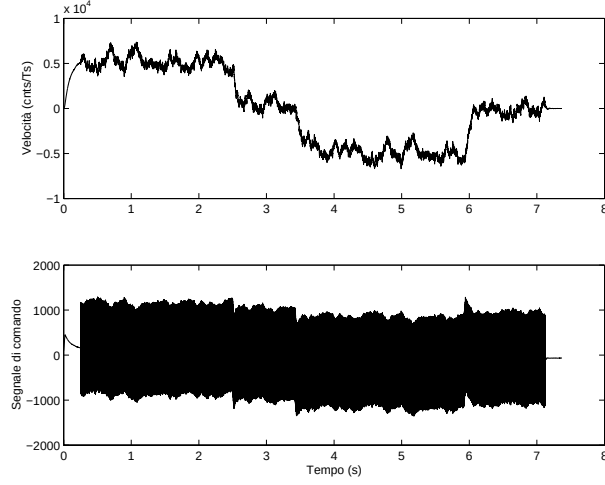


Figura 7.11: Acquisizione per l'identificazione dell'asse y del sistema $L2$

7.5 Stima

Analisi preliminare. Per prima cosa osserviamo il periodogramma dei dati di ingresso e uscita, riportato in figura 7.12. Si notano due risonanze, una attorno ai 70 Hz, l'altra attorno ai 350 Hz. Non si rilevano componenti alle frequenze del *cogging* che facciano supporre di dover filtrare i dati

$$f_{cog} = n_c \cdot v = \frac{1}{16 \text{ mm}} \cdot 200 \text{ mm/s} = 12.5 \text{ Hz.} \quad (7.4)$$

Per avere una descrizione preliminare del comportamento dell'asse si effettuano due stime basate su modelli ARX di ordine 20: una a partire dai dati originali, l'altra basata su una versione decimata di un fattore 4, per rilevare eventuali dinamiche in bassa frequenza non modellate dall'altra stima. I diagrammi di Bode (figura 7.13) sostanzialmente concordano, quindi non è necessario variare il tempo di campionamento. Nelle stime preliminari è vantaggioso utilizzare modelli ARX, perché si ottengono in modo molto più rapido rispetto ai modelli ARMAX.

Modelli definitivi Si stimano un modello ARX di ordine 30 e un modello ARMAX di ordine 18. Il ritardo di entrambi è stato stimato nel modo descritto in precedenza, ed è pari a 2.

Per confrontare i due modelli si calcola J mediante le (5.21) e (5.20), sulla base del *set* di dati non utilizzato per le stime. La differenza tra i due

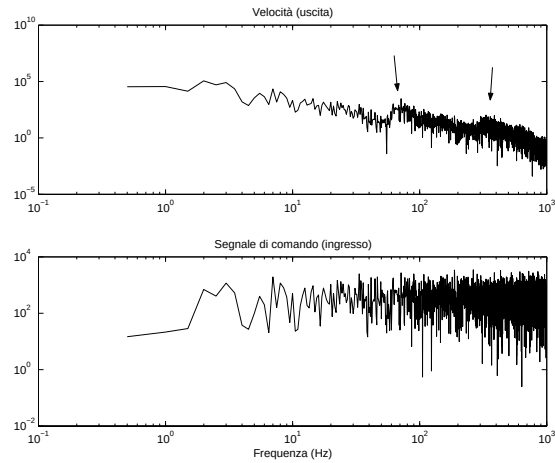


Figura 7.12: Periodogramma dei dati di ingresso e uscita. Si notino le due risonanze attorno ai 70 Hz e ai 350 Hz (indicate dalle frecce).

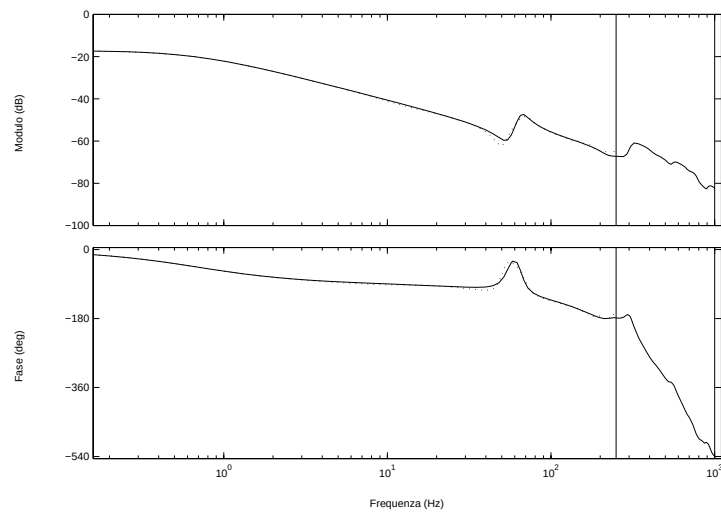


Figura 7.13: Stime preliminari basate su un modello ARX di ordine 20. Il modello tratteggiato si basa sui dati decimati di un fattore 4. Si noti che le velocità sono state convertite in mm/s per agevolare il confronto tra i modelli.

modelli è minima (si veda la figura 7.15). Il modello ARMAX passa l'analisi dei residui, mentre nel modello ARX l'autocorrelazione assume valori elevati (si veda la figura 7.16).

Perciò è ragionevole prendere il modello ARMAX come scelta definitiva. Il valore numerico è

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + C(q)e(t);$$

$$\begin{aligned} A(q) = & 1 - 2.583q^{-1} + 2.349q^{-2} - 0.9592q^{-3} + 0.514q^{-4} \\ & - 0.2849q^{-5} - 0.8599q^{-6} + 1.267q^{-7} - 0.33q^{-8} \\ & + 0.02082q^{-9} - 0.06729q^{-10} - 0.7092q^{-11} + 1.372q^{-12} \\ & - 0.9346q^{-13} + 0.3358q^{-14} - 0.4668q^{-15} + 0.5784q^{-16} \\ & - 0.3303q^{-17} + 0.08818q^{-18}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(q) = & 0.0093q^{-2} + 0.08209q^{-3} - 0.12q^{-4} - 0.01027q^{-5} \\ & + 0.0561q^{-6} + 0.02525q^{-7} - 0.003055q^{-8} - 0.08439q^{-9} \\ & - 0.006644q^{-10} + 0.06385q^{-11} + 0.02391q^{-12} - 0.003077q^{-13} \\ & - 0.07063q^{-14} + 0.03073q^{-15} + 0.04154q^{-16} - 0.005879q^{-17} \\ & - 0.02921q^{-18} + 0.009011q^{-19}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(q) = & 1 - 1.838q^{-1} + 0.9327q^{-2} - 0.1794q^{-3} + 0.4792q^{-4} \\ & + 0.05318q^{-5} - 0.9595q^{-6} + 0.2896q^{-7} + 0.2691q^{-8} \\ & + 0.3912q^{-9} - 0.1351q^{-10} - 0.7121q^{-11} + 0.5686q^{-12} \\ & - 0.163q^{-13} + 0.3224q^{-14} - 0.4585q^{-15} + 0.3094q^{-16} \\ & - 0.2353q^{-17} + 0.1338q^{-18}. \end{aligned}$$

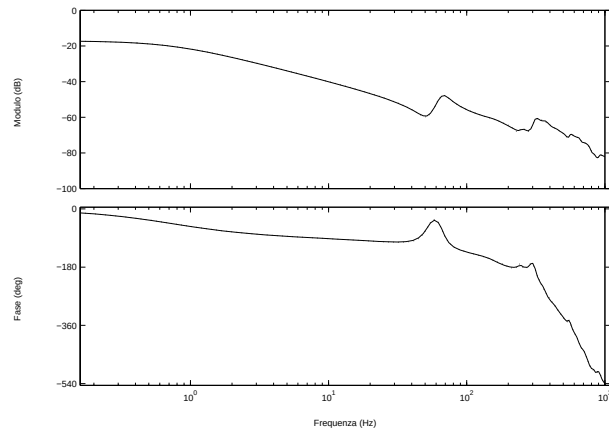


Figura 7.14: Stime definitive, basate su un modello ARMAX di ordine 20 (linea continua) con ritardo di 2 passi, e su un modello ARX di ordine 30 (tratteggio) con ritardo di due passi.

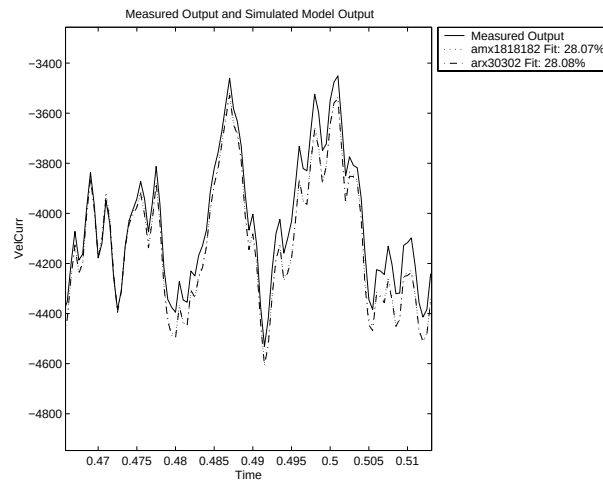


Figura 7.15: Andamento delle simulazioni dei due modelli e dell'uscita misurata. Il "fit" è calcolato come $100 \cdot [1 - \frac{1}{N} \sum (y - \hat{y}) / \frac{1}{N} \sum (y - y_{medio})]$.

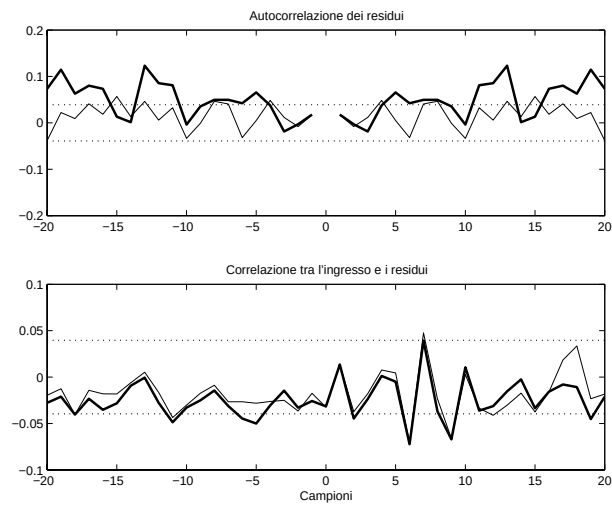


Figura 7.16: Analisi dei residui. Il modello ARX è rappresentato in grassetto. Le linee tratteggiate indicano le regioni di confidenza corrispondenti al 99% di probabilità nel caso gaussiano.

Capitolo 8

Conclusioni

Il lavoro svolto ha portato all'individuazione dei principali fattori per giungere a delle stime affidabili:

- si è visto che un approccio di tipo diretto, utilizzando un regolatore a bassa banda, consente di risolvere brillantemente il problema dell'identificazione ad anello chiuso;
- gli effetti non lineari, come l'attrito e il *cogging*, possono essere attenuati scegliendo opportunamente la traiettoria dell'asse durante l'esperimento e ricorrendo, se necessario, a dei filtri;
- è stata evidenziata la grande importanza del tempo di campionamento dell'esperimento tra i fattori che permettono di ottenere delle stime significative a tutte le frequenze;
- tra i tipi di segnali di ingresso studiati, si è distinto il segnale binario pseudo-random (PRBS): il suo spettro particolare permette di fare delle stime preliminari basate sul periodogramma e la facilità con cui si ottiene è tale da consentire l'implementazione di un generatore di sequenze binarie direttamente a bordo della scheda di controllo assi;
- sono state illustrate le strutture di modelli che consentono di ottenere delle buone stime e gli schemi di riduzione dell'ordine e ricampionamento che permettono di adattare le stime alle esigenze di controllo;
- infine, con l'identificazione dell'anello di velocità chiuso, si è vista una diversa funzione delle stime: esse sono un potente strumento di analisi per studiare il comportamento dei regolatori, siano essi implementati sulla scheda di controllo *MachM+* oppure no.

I risultati ottenuti, grazie anche al software realizzato, sono immediatamente applicabili ai sistemi Salvagnini e molto presto verranno utilizzati per realizzare un controllo assi interamente gestito dalla scheda *MachM+*.

Le principali limitazioni ai risultati trovati sono date dalla disomogeneità della struttura dell'asse. L'affidabilità dei modelli è limitata alla porzione dell'asse su cui si sono acquisiti i dati e comunque, per avere una percezione della variabilità del modello dell'asse è necessario ripetere l'identificazione in più punti. Questo lascia spazio ad altre tecniche di identificazione e di controllo robusto più evolute.

Appendice A

Espressione della funzione limite nel dominio della frequenza

Si consideri l'espressione fondamentale

$$\bar{V}(\theta) = \bar{E} \frac{1}{2} \varepsilon^2(t, \theta) = \frac{1}{4\pi T} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \Phi_\varepsilon(\omega, \theta) d\omega \quad (\text{A.1})$$

dove $\Phi_\varepsilon(\omega, \theta)$ è lo spettro dell'errore di predizione $\{\varepsilon(t)\}$.

Supponendo che i dati vengano generati dal modello vero (3.3), dalla (3.12) si ottiene la seguente espressione per l'errore di predizione

$$\begin{aligned} \varepsilon(t, \theta) &= H^{-1}(q, \theta)[y(t) - G(q, \theta)u(t)] = H_\theta^{-1}[(G_0 - G_\theta)u(t) + H_0 e_0(t)] \\ &= H_\theta^{-1}[(G_0 - G_\theta)u(t) + (H_0 - H_\theta)e_0(t)] + e_0(t) \\ &= H_\theta^{-1} \begin{bmatrix} (G_0 - G_\theta) & (H_0 - H_\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ e_0(t) \end{bmatrix} + e_0(t). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Per questioni di spazio si omette l'argomento q .

Per un noto risultato sul filtraggio di processi quasi-stazionari e per la (A.2) si può esprimere lo spettro di ε come segue

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon(\omega, \theta) &= \frac{1}{|H_\theta|^2} \begin{bmatrix} (G_0 - G_\theta) & (H_0 - H_\theta) \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} \Phi_u & \Phi_{ue} \\ \Phi_{eu} & \lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\bar{G}_0 - \bar{G}_\theta) \\ (\bar{H}_0 - \bar{H}_\theta) \end{bmatrix} + \lambda_0. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Lo spettro congiunto di $\{u(t), e_0(t)\}$ si fattorizza in

$$\begin{bmatrix} \Phi_u & \Phi_{ue} \\ \Phi_{eu} & \lambda_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \frac{\Phi_{eu}}{\Phi_u} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_u & 0 \\ 0 & \lambda_0 - \frac{|\Phi_{eu}|^2}{\Phi_u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \frac{\Phi_{eu}}{\Phi_u} \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Introducendo

$$B(e^{j\omega}) = \frac{[H_0(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega}, \theta)] \Phi_{ue}(\omega)}{\Phi_u(\omega)} \quad (\text{A.5})$$

e usando la (A.4) si ottiene

$$\Phi_\varepsilon(\omega, \theta) = \frac{|G_0 + B_\theta - G_\theta|^2 \Phi_u}{|H_\theta|^2} + \frac{|H_0 - H_\theta|^2 \left(\lambda_0 - \frac{|\Phi_{eu}|^2}{\Phi_u} \right)}{|H_\theta|^2} + \lambda_0. \quad (\text{A.6})$$

Inserendo la (A.6) nella (A.1) si ottiene una espressione della funzione limite nel dominio della frequenza. Si noti che, se esiste un valore dei parametri θ_0 per cui $G_\theta = G_0$ ed $H_\theta = H_0$, i primi due termini della (A.6) si annullano, quindi si tratta di un punto minimo di $\bar{V}(\theta)$.

Bibliografia

- [Cis99] D. Ciscato. Appunti di elettronica industriale. Dispensa, Dipartimento di Elettronica e Informatica, Università di Padova, 35131 Padova, Italy, 1999.
- [Dav70] W. D. T. Davies. *System Identification for Self-Adaptive Control*. Wiley Interscience, 1970.
- [FL99] U. Forssell and L. Ljung. Closed-loop identification revisited. *Automatica*, (35):1215–1241, 1999.
- [FPW90a] G.F. Franklin, J.D. Powell, and M.L. Workman. *Digital Control of Dynamic Systems*. Addison Wesley, second edition, 1990.
- [FPW90b] G.F. Franklin, J.D. Powell, and M.L. Workman. *Digital Control of Dynamic Systems*. Addison Wesley, second edition, 1990.
- [GLdH01] M. Gevers, L. Ljung, and P. Van den Hof. Asymptotic variance expressions for closed-loop identification. *Automatica*, (37):781–786, 2001.
- [KFP96] I. Kollár, G. Franklin, and R. Pintelon. On the equivalence of z-domain and s-domain models in system identification, June 1996.
- [Lju99] L. Ljung. *System Identification, Theory for the User*. Prentice Hall, second edition, 1999.
- [Pic99a] G. Picci. *Filtraggio Statistico (Wiener, Levinson, Kalman) e Applicazioni*. Libreria Progetto, Padova, 1999.
- [Pic99b] G. Picci. Metodi statistici per l'identificazione di modelli lineari. Dispensa, Dipartimento di Elettronica e Informatica, Università di Padova, 35131 Padova, Italy, 1999.

- [WL86] B. Wahlberg and L. Ljung. Design variables for bias distribution in transfer function estimation. *IEEE Trans. Automatic Control*, (AC-31):134–144, 1986.